

KEUNIKAN PERSAMAAN LINIER

Riyanto

Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP Universitas Bengkulu
email: riyanto_unib@yahoo.com

Abstrak. Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama-dengan. Dalam matematika dikenal beberapa macam persamaan, di antaranya adalah persamaan linier, kuadrat, pangkat tiga, dan seterusnya. Persamaan linier merupakan persamaan pangkat 1. Berdasarkan kajian ditemukan bahwa persamaan linier memiliki pola unik, yaitu 1) jumlah bilangan berurutan pada ekspresi kiri sama dengan jumlah bilangan berurutan pada ekspresi kanan dan 2) jumlah bilangan dengan beda suku sama pada ekspresi kiri sama dengan jumlah bilangan berurutan pada ekspresi kanan.

Kata Kunci: Keunikan, persamaan, linier

1. PENDAHULUAN

Dalam http://www.creationresearches.com/cr5_e.shtml [1] dikutip pernyataan Galileo Galilei bahwa matematika adalah bahasa yang digunakan Tuhan dalam menulis alam semesta. Bahasa matematika disimbolkan dengan bilangan, sehingga semua hal di dunia ini dapat dimodelkan dengan bilangan. Dalam sistem bilangan, operasi bilangan dijadikan alat dan melalui operasi bilangan dapat dihasilkan sesuatu yang unik.

Dalam persamaan banyak dihasilkan fenomena-fenomena menarik dari bilangan, di antaranya adalah pythagoras, teorema terakhir Fermat, persamaan Madachy, dan lain-lain. Dalil Pythagoras yang terkenal adalah dalam segitiga dinyatakan bahwa sisi miring kuadrat = jumlah kuadrat dari sisi siku-sikunya. Riyanto [2] mengutip pendapat Fermat bahwa $x^n + y^n = z^n$ dengan x, y, z , dan n bilangan positif, tidak ada jawaban jika $n > 2$. Misalnya $3 + 4 = 7$ dan $3^2 + 4^2 = 5^2$. Madachy [3] juga menemukan bilangan-bilangan yang sama dengan jumlah kuadrat dari dua pilahan bilangan tersebut, seperti: a) $1233 = 12^2 + 33^2$, b) $8833 = 88^2 + 33^2$, c) $10.100 = 10^2 + 100^2$, dan d) $588.2353 = 588^2 + 2353^2$. Riyanto [4] juga telah mengembangkan persamaan-persamaan bilangan unik, yaitu persamaan berurutan bilangan pangkat dua, tiga, dan empat.

Berdasarkan kajian ditemukan bahwa persamaan linier memiliki pola unik. Berikut ini disajikan keunikan persamaan linier.

2. KEUNIKAN PERSAMAAN LINIER

Ada banyak macam pola unik dari persamaan linier, mungkin jumlahnya takhingga. Berikut ini disajikan keunikan-keunikan tersebut.

2. 1 Persamaan Linier Berurutan dengan Ekspresi Kiri Beda Satu (BEKI = 1)

Contoh:

- 1a. $1 + 2 = 3$
- 1b. $4 + 5 + 6 = 7 + 8$
- 1c. $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$
- 1d. $16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$

1e. $25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$ dan seterusnya

Perhatikan kelima persamaan berurutan di atas. Kelima persamaan tersebut suku awalnya memiliki pola tertentu, yaitu dimulai dari 1 untuk persamaan 1a, 4 untuk persamaan 1b, 9 untuk persamaan 1c, dan 16 untuk persamaan 1d, dan 25 untuk persamaan 1e. Selisih suku awal (b') adalah 3, 5, 7, dan 9. Keempat angka tersebut, yaitu 3, 5, 7, dan 9 masing-masing memiliki selisih (b'') = 2. Pola tersebut adalah pola n^2 , jika n = bilat. Hasil tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut.

$U_n \quad b' \quad b''$

1

} 3

4 } 2

} 5

9 } 2

} 7

16 } 2

} 9

25 } 2

} 11

36 dan seterusnya

2.1.1 Cara mencari suku awal (U_n)

Meskipun kita sudah dapat menjawab bahwa pola suku awal persamaan unik di atas, yaitu n^2 , kita dapat membuktikannya, sebagai berikut.

Berdasarkan hasil di atas, U_n untuk persamaan kuadrat berurutan, diperoleh dari:

$$U_1 = b'' \cdot n - (b'' - 1)$$

$$U_2 = U_1 + 3 \rightarrow U_2 = U_1 + (b''n - 1) = 1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4$$

$$U_3 = U_2 + 5 \rightarrow U_3 = U_2 + (b''n - 1) = 1 + 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 1 = 9$$

$$U_4 = U_3 + 7 \rightarrow U_4 = 1 + 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 4 - 1 = 16$$

$$U_5 = U_4 + 9 \rightarrow U_5 = 1 + 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 4 - 1 + 2 \cdot 5 - 1 = 25$$

$$U_6 = U_5 + 11 \rightarrow U_6 = 1 + 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 4 - 1 + 2 \cdot 5 - 1 + 2 \cdot 6 - 1$$

$$= 1 + 2(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6 - 1)$$

$$= 1 + 2(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6 - 1) + (2 - 2)$$

$$= 1 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6 - 1) + (-2)$$

$$U_6 = 1 + 2 \cdot 21 - 5 - 2 = 36$$

$$U_n = U_{n-1} + 2n - 1 \rightarrow$$

$$U_n = 1 + b'' \cdot (n(n+1)/2 - (n-1)(b''-1) - (b''))$$

$$= 1 + b'' \cdot (n(n+1)/2 - (nb'' - b'' - n + 1) - b'')$$

$$= 1 + b''(n(n+1)/2 - nb'' + n - 1)$$

$$= b''(n(n+1)/2 - n(b''-1))$$

$$= 2(n(n+1)/2) - n$$

$$= 2(n^2 + n)/2 - n$$

$$= (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI \cdot n \text{ atau}$$

$$= n^2 + n - n$$

$$U_n = n^2$$

Jadi, suku awal untuk persamaan linier berurutan dengan BEKI = 1, dapat dihitung dengan rumus:

$$U_n = n^2 \quad \dots (2)$$

U_n = suku awal dari ekspresi kiri

U_n pertama = 1

Jumlah suku pada ekspresi kiri ($\sum_{S, BEKI}$) = $n + 1$

Jumlah suku pada ekspresi kanan ($\sum_{S, EKA}$) = n

Jumlah suku persamaan ($\sum_{sp} = 2n + 1$)
 Jumlah sampai dengan suku ke n pada ekspresi kiri = S_{ni}
 Jumlah sampai dengan suku ke n pada ekspresi kanan = S_{na}
 $n = 1$ untuk persamaan berurutan pertama
 $n = 2$ untuk persamaan berurutan kedua
 $n = 3$ untuk persamaan berurutan ketiga, dan seterusnya

2.1.2 Pembuktian untuk $b = 1$

$$U_{ni} = n^2$$

$$S_{ni} = n^2 (n + 1) + (n + 1)n/2 = n^3 + n^2 + (n^2 + n)/2$$

$$U_{na} = n^2 + n + 1$$

$$S_{na} = (n^2 + n + 1)n + (n - 1)n/2 = n^3 + n^2 + n + (n^2 - n)/2$$

$$S_{ni} = S_{na}$$

$$n^3 + n^2 + (n^2 + n)/2 = n^3 + n^2 + n + (n^2 - n)/2 \dots\dots (x2)$$

$$2n^3 + 2n^2 + n^2 + n = 2n^3 + 2n^2 + 2n + n^2 - n$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = 2n^3 + 3n^2 + n \quad (\square = \text{Terbukti})$$

Contoh.

Perhatikan persamaan 1a—1f di atas.

- 1a. Jika $n = 1$, maka $U_n = 1$
- 1b. Jika $n = 2$, maka $U_n = 4$
- 1c. Jika $n = 3$, maka $U_n = 9$
- 1d. Jika $n = 4$, maka $U_n = 16$
- 1e. Jika $n = 5$, maka $U_n = 25$

Apakah juga berlaku untuk n lebih besar 5. Mari kita lihat sajian berikut.

1f. Jika $n = 8$ maka $U_n = 8^2 = 64$
 Jumlah ekspresi kiri = 9 dan ekspresi kanan = 8
 $64 + 67 + 68 + 69 + 70 + 71 + 72 + 73 + 74 = 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 81 + 82$

Apakah keunikan persamaan linier berurutan juga terjadi jika $BEKI > 1$?

Untuk itu, perhatikan paparan berikut.

2.2 Persamaan Linier Berurutan dengan Beda Suku Ekspresi Kiri Dua (BEKI= 2)

Contoh:

- 2a. $1 + 3 = 4$
- 2b. $5 + 7 + 9 = 10 + 11$
- 2c. $12 + 14 + 16 + 18 = 19 + 20 + 21$
- 2d. $22 + 24 + 26 + 28 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34$
- 2e. $35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 = 46 + 47 + 48 + 49 + 50$
- 2f. $51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 = 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69$

Jika diperhatikan keenam persamaan berurutan di atas, suku awalnya memiliki pola tertentu, yaitu dimulai dari 1 untuk persamaan 2a, 5 untuk persamaan 2b, 12 untuk persamaan 2c, dan 22 untuk persamaan 2d, 35 untuk persamaan 2e, dan 51 untuk persamaan 2f. Selisih suku awal (b') adalah 4, 7, 10, 13, dan 16. Kelima angka tersebut, yaitu 4, 7, 10, 13, dan 16 masing-masing memiliki selisih (b'') = 3. Hasil tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut.

$U_n \quad b' \quad b''$
 1
 } 4
 5 } 3
 } 7
 12 } 3
 } 10
 22 3
 } 13
 35
 } 16
 51 dan seterusnya

2.2.1 Cara mencari suku awal (U_n)

Berdasarkan hasil di atas, U_n untuk persamaan berurutan, diperoleh dari:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= b''n - (b''-1) = 3.1 - 2 = 1 \\
 U_2 &= U_1 + 4 \rightarrow U_2 = U_1 + b''n - 2 = 1 + 3.2 - 2 = 5 \\
 U_3 &= U_2 + 7 \rightarrow U_3 = U_2 + (b''n - 2) = 1 + 3.2 - 2 + 3.3 - 2 = 12 \\
 U_4 &= U_3 + 10 \rightarrow U_4 = 1 + 3.2 - 2 + 3.3 - 2 + 3.4 - 2 = 22 \\
 U_5 &= U_4 + 13 \rightarrow U_5 = 1 + 3.2 - 2 + 3.3 - 2 + 3.4 - 2 + 3.5 - 2 = 35 \\
 U_6 &= U_5 + 16 \rightarrow U_6 = 1 + 3.2 - 2 + 3.3 - 2 + 3.4 - 2 + 3.5 - 2 + 3.6 - 2 = 51 \\
 &= 1 + 3(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)2 \\
 &= 1 + 3(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)2 + (3 - 3) \\
 &= 1 + 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)2 + (-3) \\
 U_6 &= 1 + 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)2 = 1 + 3.21 - 10.2 - 3 = \\
 U_n &= U_{n-1} + b''n-2 \rightarrow \\
 U_n &= 1 + b''.(n(n+1)/2 - (n-1)(b''-1) - (b'')) \\
 &= 1 + b''.(n(n+1)/2 - (nb'' - b'' - n + 1) - b'') \\
 &= 1 + b''.(n(n+1)/2 - nb'' + n - 1) \\
 &= \mathbf{b''(n(n+1)/2 - n(b''-1))} \\
 &= 3(n(n+1)/2 - 2n) \\
 &= 3(n^2 + n)/2 - 2n \\
 U_n &= (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n
 \end{aligned}$$

2.3 Persamaan Linier Berurutan dengan Beda Suku Ekspresi Kiri Tiga (BEKI = 3)

- 3a. $1 + 4 = 5$
 3b. $6 + 9 + 12 = 13 + 14$
 3c. $15 + 18 + 21 + 24 = 25 + 26 + 27$
 3d. $28 + 31 + 34 + 37 + 40 = 41 + 42 + 43 + 44$
 3e. $45 + 48 + 51 + 54 + 57 + 60 = 61 + 62 + 63 + 64 + 65$

Perhatikan keenam persamaan berurutan di atas. Suku awal keenam persamaaan tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut.

$U_n \quad b' \quad b''$
 1
 } 5
 6 } 4
 } 9
 15 } 4
 } 13
 28 4
 } 17
 45 4 dan seterusnya

2.3.1 Cara mencari suku awal (U_n)

Berdasarkan hasil di atas, U_n untuk persamaan kuadrat berurutan, diperoleh dari:

$$U_1 = b''n - (b''-1) = 4.1 - 3 = 1$$

$$U_2 = U_1 + 5 \rightarrow U_2 = U_1 + b''n - (b''-1) = 1 + 4.2 - (4-1) = 1 + 8 - 3 = 6$$

$$U_3 = U_2 + 9 \rightarrow U_3 = U_2 + (b''n - (b''-1)) = 1 + 4.2 - 3 + 4.3 - 3 = 15$$

$$U_4 = U_3 + 13 \rightarrow U_4 = 1 + 4.2 - 3 + 4.3 - 3 + 4.4 - 3 = 28$$

$$U_5 = U_4 + 17 \rightarrow U_5 = 1 + 4.2 - 3 + 4.3 - 3 + 4.4 - 3 + 4.5 - 3 = 45$$

$$U_6 = U_5 + 21 \rightarrow U_6 = 1 + 4.2 - 3 + 4.3 - 3 + 4.4 - 3 + 4.5 - 3 + 4.6 - 3 = 66$$

$$= 1 + 4(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)3$$

$$= 1 + 4(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)3 + (4 - 4)$$

$$= 1 + 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)3 + (-4)$$

$$U_6 = 1 + 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)3 - 4 = 1 + 4.21 - 5.2 - 4 =$$

$$U_n = U_{n-1} + b''n-2 \rightarrow$$

$$U_n = 1 + b''.(n(n+1)/2 - (n-1)(b''-1)) - (b'')$$

$$= 1 + b''.(n(n+1)/2 - (nb'' - b'' - n + 1)) - b''$$

$$= 1 + b''.(n(n+1)/2 - nb'' + n - 1)$$

$$= b''(n(n+1)/2 - n(b''-1))$$

$$= 4(n(n+1)/2 - 3n)$$

$$= 4(n(n+1) - 3n)$$

$$= 4(n^2 - n)/2 - 3n$$

$$= (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI.n \text{ atau}$$

$$U_n = 2(n^2 - n) - 3n$$

Jadi, suku awal untuk persamaan berurutan dapat dihitung dengan rumus:

$$U_n = (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI.n$$

2.4 Persamaan Linier Berurutan dengan Beda Suku Ekspresi Kiri 10 (BEKI = 10)

$$4a. 1 + 11 = 12$$

$$4b. 13 + 23 + 33 = 34 + 35$$

$$4c. 36 + 46 + 56 + 66 = 67 + 68 + 69$$

$$4d. 70 + 80 + 90 + 100 + 110 = 111 + 112 + 113 + 114$$

$$4e. 115 + 125 + 135 + 145 + 155 + 165 = 166 + 167 + 168 + 169 + 170$$

$$4f. 171 + 181 + 191 + 201 + 211 + 221 + 231 = 232 + 233 + 234 + 235 + 236 + 237$$

Perhatikan keenam persamaan berurutan di atas. Suku awal keenam persamaan tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$U_n \quad b' \quad b''$$

$$1$$

$$\} 12$$

$$13 \quad \} 11$$

$$\} 23$$

$$36 \quad \} 11$$

$$\} 34$$

$$70 \quad 11$$

$$\} 45$$

$$115 \quad 11$$

$$\} 56$$

$$171 \quad 11$$

$$\} 67$$

$$238$$

dan seterusnya

2.4.1 Cara mencari suku awal (U_n)

Berdasarkan hasil di atas, U_n untuk persamaan kuadrat berurutan, diperoleh dari:

$$U_1 = b''n - (b''-1) = 11.1 - 11 - 1 = 1$$

$$U_2 = U_1 + 12 \rightarrow U_2 = U_1 + b''n - (b''-1) = 1 + 11.2 - (11-1) = 1 + 22 - 10 = 13$$

$$U_3 = U_2 + 23 \rightarrow U_3 = U_2 + (b''n - (b''-1)) = 1 + 11.2 - 10 + 11.3 - 10 = 36$$

$$U_4 = U_3 + 34 \rightarrow U_4 = 1 + 11.2 - 10 + 11.3 - 10 + 11.4 - 10 = 70$$

$$U_5 = U_4 + 45 \rightarrow U_5 = 1 + 11.2 - 10 + 11.3 - 10 + 11.4 - 10 + 11.5 - 10 = 115$$

$$U_6 = U_5 + 56 \rightarrow U_6 = 1 + 11.2 - 10 + 11.3 - 10 + 11.4 - 10 + 11.5 - 10 + 11.6 - 10 = 171$$

$$= 1 + 11(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)10$$

$$= 1 + 11(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)10 + (11 - 11)$$

$$= 1 + 11(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)10 + (-11)$$

$$U_6 = 1 + 11(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)10 - 11 = 1 + 11.21 - 5.10 - 11 = 171$$

$$U_n = U_{n-1} + b''n - 2 \rightarrow$$

$$U_n = 1 + b''.(n(n+1)/2 - (n-1)(b''-1) - (b''))$$

$$= 1 + b''.(n(n+1)/2 - (nb'' - b'' - n + 1) - b'')$$

$$= 1 + b''.(n(n+1)/2 - nb'' + n - 1)$$

$$= b''(n(n+1)/2 - n(b''-1))$$

$$= 11(n(n+1)/2 - 10n)$$

$$= 11(n(n+1)/2 - 10n)$$

$$= 11(n^2 - n)/2 - 10n$$

$$U_n = (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI n$$

Jadi, suku awal untuk persamaan berurutan dapat dihitung dengan rumus:

$$U_n = (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI n$$

2.5 Persamaan Linier Berurutan dengan Beda Suku Ekspresi Kiri Seratus (BEKI = 100)

$$1 + 101 = 102$$

$$103 + 203 + 303 = 304 + 305$$

$$306 + 406 + 506 + 606 = 607 + 608 + 609$$

$$610 + 710 + 810 + 910 + 1010 = 1011 + 1012 + 1013 + 1014$$

$$1015 + 1115 + 1215 + 1315 + 1415 + 1515 = 1516 + 1517 + 1518 + 1519 + 1520$$

$$1521 + 1621 + 1721 + 1821 + 1921 + 2021 + 2121 = 2222 + 2223 + 2224 + 2225 + 2226 + 2227$$

Perhatikan keenam persamaan berurutan di atas. Suku awal keenam persamaan tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$U_n \quad b' \quad b''$$

$$1$$

$$\} 102$$

$$103 \quad \} 101$$

$$\} 203$$

$$306 \quad \} 101$$

$$\} 304$$

$$610 \quad 101$$

$$\} 405$$

$$1015 \quad 101$$

$$\} 506$$

$$1521$$

2.5.1 Cara mencari suku awal (U_n)

Berdasarkan hasil di atas, U_n untuk persamaan kuadrat berurutan, diperoleh dari:

$$U_1 = b''n - (b''-1) = 101.1 - 100 = 1$$

$$U_2 = U_1 + 102 \rightarrow U_2 = U_1 + b''n - (b''-1) = 1 + 101.2 - (101-1) = 1 + 202 - 100 = 103$$

$$U_3 = U_2 + 203 \rightarrow U_3 = U_2 + (b''n - (b''-1)) = 1 + 101.2 - 100 + 101.3 - 100 = 306$$

$$U_4 = U_3 + 304 \rightarrow U_4 = 1 + 11.2 - 10 + 101.3 - 100 + 101.4 - 100 = 610$$

$$U_5 = U_4 + 405 \rightarrow U_5 = 1 + 101.2 - 100 + 101.3 - 100 + 101.4 - 100 + 101.5 - 100 = 1015$$

$$U_6 = U_5 + 506 \rightarrow U_6 = 1 + 101.2 - 100 + 101.3 - 100 + 101.4 - 100 + 101.5 - 100 + 101.6 - 100 = 1521$$

$$= 1 + 101(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)100$$

$$= 1 + 101(2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)100 + (101 - 101)$$

$$= 1 + 101(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)100 + (-101)$$

$$U_6 = 1 + 101(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (6-1)100 - 101 = 1 + 101.21 - 5.100 - 101$$

$$U_n = U_{n-1} + b''n - 2 \rightarrow$$

$$U_n = 1 + b''.(n(n+1)/2 - (n-1)(b''-1)) - (b'')$$

$$= 1 + b''.(n(n+1)/2 - (nb'' - b'' - n + 1)) - b''$$

$$= 1 + b''.(n(n+1)/2 - nb'' + n - 1)$$

$$= b''(n(n+1)/2 - n(b''-1))$$

$$= 101(n(n+1)/2 - 100n)$$

$$= 101(n^2 + n)/2 - 100n$$

$$U_n = (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI.n$$

Jadi, suku awal untuk persamaan berurutan dapat dihitung dengan rumus:

$$U_n = (BEKI + 1)(n^2 - n)/2 - BEKI.n$$

Berdasarkan beberapa hasil perhitungan diperoleh hasil jika beda suku ekspresi kiri (BEKI) = 1 maka $b'' = 2$, jika BEKI = 2 maka $b'' = 3$, jika BEKI = 3 maka $b'' = 4$, jika BEKI = 10 maka $b'' = 11$, jika BEKI = 50 maka $b'' = 11$, jika BEKI = 100 maka $b'' = 101$. Dengan kata lain, $b'' = BEKI + 1$.

Untuk memudahkan, $U_n = b''(n(n+1)/2 - n(b''-1)) = (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - n(BEKI)$. Dengan demikian, jika BEKI = 500, maka $U_n = 501(n^2 + n)/2 - 500n$. Jika BEKI = 1000, maka $U_n = 1001(n^2 + n)/2 - 1000n$. Jika BEKI = 10000, maka $U_n = 10001(n^2 + n)/2 - 10000n$.

3. PEMBUKTIAN

Pembuktian untuk BEKI = 1 sudah dilakukan dan sudah terbukti. Apakah rumus tersebut berlaku untuk BEKI > 1? Berikut akan disajikan pembuktian untuk BEKI = 2 dan BEKI = b.

3.1 Pembuktian untuk BEKI = 2

$$U_{ni} = (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n$$

$$S_{ni} = \{(BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n\}(n + 1) + BEKI(n + 1)n/2$$

$$= \{3(n^2 + n)/2 - 2n\}(n + 1) + 2(n + 1)n/2$$

$$= 3/2(n^2 + n)(n + 1) - 2n^2 - 2n + n^2 + n$$

$$S_{ni} = 3/2(n^3 + 2n^2 + n) - n^2 - n$$

$$U_{na} = (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n + BEKI(n) + 1$$

$$S_{na} = \{(BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n + BEKI(n) + 1\}n + (n-1)n/2$$

$$= \{3(n^2 + n)/2 - 2n + 2n + 1\}n + (n-1)n/2$$

$$S_{na} = (3n^3 + 3n^2)/2 + n + (n^2 - n)/2$$

$$S_{ni} = S_{na}$$

$$3/2(n^3 + 2n^2 + n) - n^2 - n = (3n^3 + 3n^2)/2 + n + (n^2 - n)/2 \dots\dots (x2)$$

$$3(n^3 + 2n^2 + n) - 2n^2 - 2n = 3n^3 + 3n^2 + 2n + n^2 - n$$

$$3n^3 + 4n^2 + n = 3n^3 + 4n^2 + n \text{ (terbukti)}$$

3.2 Pembuktian untuk BEKI = b

$$U_{ni} = (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n$$

$$\begin{aligned}
S_{ni} &= \{ (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n \}(n + 1) + BEKI(n + 1)n/2 \\
&= \{ (b+1)(n^2 + n)/2 - bn \}(n + 1) + b/2(n + 1)n \\
S_{ni} &= (b+1)/2(n^3 + 2n^2 + n) - bn^2 - bn + b/2n^2 + b/2.n \\
2S_n &= (b+1)(n^3 + 2n^2 + n) - 2bn^2 - 2bn + bn^2 + b.n \\
2S_n &= (b+1)(n^3 + 2n^2 + n) - bn^2 - bn \\
2S_n &= bn^3 + 2bn^2 + bn + n^3 + 2n^2 + n - bn^2 - bn \\
2S_n &= bn^3 + bn^2 + n^3 + 2n^2 + n \\
S_{ni} &= (bn^3 + bn^2 + n^3 + 2n^2 + n)/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{na} &= (BEKI + 1)(n^2 + n)/2 - BEKI.n + BEKI(n) + 1 \\
S_{na} &= \{ (b + 1)(n^2 + n)/2 - bn + b(n) + 1 \}n + (n-1)n/2 \\
&= \{ (b+1)(n^2 + n)/2 - bn + bn + 1 \}n + (n-1)n/2 \\
2S_{na} &= \{ (b+1)(n^2 + n) - 2bn + 2bn + 2 \}n + (n-1)n \\
2S_{na} &= \{ (bn^2 + bn + n^2 + n - 2bn + 2bn + 2) \}n + (n-1)n \\
2S_{na} &= bn^3 + bn^2 + n^3 + n^2 + 2n + n^2 - n \\
2S_{na} &= bn^3 + bn^2 + n^3 + 2n^2 + n \\
S_{na} &= (bn^3 + bn^2 + n^3 + 2n^2 + n)/2 \\
\text{Jadi } S_{ni} &= S_{na} \quad (\square = \text{ terbukti})
\end{aligned}$$

3.3 Penerapan:

Untuk BEKI = 1000, maka diperoleh hasil:

$$1 + 1001 = 1002$$

$$1003 + 2003 + 3003 = 3004 + 3005$$

$$3006 + 4006 + 5006 + 6006 = 6007 + 6008 + 6009$$

$$6010 + 7010 + 8010 + 9010 + 1010 = 1011 + 1012 + 1013 + 1014, \text{ dan seterusnya}$$

Untuk BEKI = 1000000, maka diperoleh hasil:

$$1 + 1000001 = 1000002$$

$$1000003 + 2000003 + 3000003 = 3000004 + 3000005$$

$$3000006 + 4000006 + 5000006 + 6000006 = 6000007 + 6000008 + 6000009$$

$$6000010 + 7000010 + 8000010 + 9000010 + 1000010 = 1000011 + 1000012 + 1000013 + 1000014, \text{ dan seterusnya}$$

4. SIMPULAN DAN SARAN

4.1 Simpulan

Berdasarkan kajian diperoleh hasil bahwa ada banyak persamaan-persamaan unik pada persamaan linier.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil kajian disarankan untuk melanjutkan kajian persamaan-persamaan bilangan unik lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] http://www.creationresearches.com/cr5_e.shtml). Creation or Evolution? Diunduh pada 8 Agustus 2012.
- [2] Riyanto. (2008). Cara mudah mencari bilangan-bilangan teorema terakhir Fermat. *Prosiding Kongres dan seminar nasional matematika*, Juli 2008, **XIV**; 113—120.
- [3] Madachy, J. S. (1979). *Madachy's Mathematical Recreations*, Dover, New York.
- [4] Riyanto. (2011). Persamaan-persamaan unik untuk pangkat $n \leq 5$. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*; Oktober 20, **1V**. Universitas Katolik Parahyangan.