

Cara Mudah Mencari

BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT

$$X^n + Y^n = Z^n$$

Riyanto adalah guru besar teknologi pendidikan, Lahir di Tuban pada tanggal 22 Juni 1960. Gelar sarjana Pendidikan jurusan Pendidikan Mesin diperoleh di Fakultas Teknologi dan Kejuruan IKIP Surabaya (sekarang FT Unesa) tahun 1983. Magister Pendidikan bidang Teknologi pembelajaran diperoleh di FPS IKIP Malang (sekarang PPS UM) pada tahun 1988, dan doktor bidang teknologi pembelajaran diperoleh di PPS UM pada tahun 1994.

Sejak tahun 1989 dia mengajar di FKIP Universitas Bengkulu. Pada tahun 1986 menulis buku Tali Kawat Baja dan direvisi pada tahun 1991, Buku lain yang ditulis dan adalah Bilangan Khayal Baru, Keindahan Matematika, Matematika dan Kreativitas, Cara Menghitung Cepat dan Mudah, Menghitung akar dengan segitiga Pascal dan Terkaan, Metodologi Penelitian Matematika, Matematika Kalender, dan Kemampuan Berfikir Mendalam dalam Matematika.



PENERBIT LAKEISHA

Jl. Jendral Sudirman
Sukoran, POCES, Mojokerto
60132
Kantor: Jember, Indonesia 60132
Telp. (0301) 8250000, 8250001
Faksimili (0301) 8250002
Email: info@penerbitlakeisha.com
Website: <http://www.penerbitlakeisha.com>



9 786234 200591



Cara Mudah Mencari **BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT**



Cara Mudah Mencari

BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT

$$X^n + Y^n = Z^n$$



Riyanto

CARA MUDAH MENCARI BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT

$$X^n + Y^n = Z^n$$



Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta
Pasal 1:

1. Hak Cipta adalah hak eksklusif pencipta yang timbul secara otomatis berdasarkan prinsip deklaratif setelah suatu ciptaan diwujudkan dalam bentuk nyata tanpa mengurangi pembatasan sesuai dengan ketentuan peraturan perundang undangan.

Pasal 9:

2. Pencipta atau Pengarang Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam pasal 8 memiliki hak ekonomi untuk melakukan a. Penerbitan Ciptaan; b. Penggandaan Ciptaan dalam segala bentuknya; c. Penerjemahan Ciptaan; d. Pengadaptasian, pengaransemen, atau pentransformasian Ciptaan; e. Pendistribusian Ciptaan atau salinan; f. Pertunjukan Ciptaan; g. Pengumuman Ciptaan; h. Komunikasi Ciptaan; dan i. Penyewaan Ciptaan.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100. 000. 000, 00 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500. 000. 000, 00 (lima ratus juta rupiah).

Riyanto

CARA MUDAH Mencari Bilangan Teorema Terakhir Fermat

$$X^n + Y^n = Z^n$$



Penerbit Lakeisha

2022



CARA MUDAH MENCARI BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT

$$X^n + Y^n = Z^n$$

Penulis:
Riyanto

Editor: Andriyanto
Layout: Yusuf Deni Kristanto
Desain Cover: Tim Lakeisha
Cetak I November 2021
15,5 cm × 23 cm, 39 Halaman
ISBN: 978-623-420-059-1

Diterbitkan oleh Penerbit Lakeisha
(Anggota IKAPI No.181/JTE/2019)

Redaksi
Srikaton, RT 003, RW 001, Pucangmiliran,
Tulung, Klaten, Jawa Tengah
Hp. 08989880852, Email: penerbit_lakeisha@yahoo.com
Website: www.penerbitlakeisha.com

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang.
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan
dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.



Pada tahun 1990, penulis tertarik dan ingin dapat memecahkan Teorema Terakhir Fermat (TTF). Belum ditemukan jawabannya, pada tahun 1994 mendengar kabar bahwa TTF sudah dapat dibuktikan oleh ahli matematika dari Inggris. Karena itu, pemecahan difokuskan pada bagaimana cara mencari bilangan-bilangan yang memenuhi TTF dan pada bulan Maret 2007 rumus mencari bilangan x dan y ditemukan, Pada tanggal 18 Desember 2021 sekitar pukul 02.00 wib saat mengedit kalimat, di halaman cara mencari bilangan-bilangan x , y , z baru sadar bahwa angka-angka z yang memenuhi syarat merupakan barisan hitung. Dengan semangat penulis mengambil alat tulis dan pukul 02.14 ditemukan rumus untuk mencari bilangan z .

Buku ini diperuntukkan bagi para siswa, mahasiswa, peneliti pemula, peminat, dan guru matematika agar mereka mudah menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi TTF. Harapannya mereka termotivasi untuk menemukan cara lain yang lebih mudah atau dapat menggunakan untuk memecahkan persoalan lain. Cara ini dapat menambah khazanah dalam matematika dan semoga suatu saat nanti dapat dimanfaatkan untuk pengembangan ilmu dan teknologi.

Selesaiannya buku ini karena dukungan dari istri, terutama dukungan untuk melakukan penelitian tanpa sponsor. Selain itu,



bantuan dari berbagai pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Untuk itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada mereka yang telah membantu dalam proses penulisan buku ini.

Bengkulu, 10 Januari 2022

Penulis,



PENGANTAR	v
DAFTAR ISI.....	vii
 BAB 1 PENDAHULUAN	 1
BAB 2 SEJARAH SINGKAT PEMBUKTIAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT	3
BAB 3 HUBUNGAN ANTARA BARISAN GEOMETRI ($U_n = n^x$), DERET ARITMATIK, DAN PANGKAT SERTA KEINDAHANNYA.....	10
BAB 4 CARA MUDAH MENEMUKAN BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT (TTF)	21
BAB 5 SAJAK TENTANG FERMAT	31
 DAFTAR PUSTAKA.....	 34
LAMPIRAN.....	36
RIWAYAT HIDUP.....	39

BAB 1

PENDAHULUAN



Buku ini ditulis dari hasil penelitian yang dimulai awal tahun 1990. Paparan buku ini merupakan pengembangan dari dua artikel, yaitu 1) Hubungan antara barisan geometri ($U_n = n^x$), deret aritmatik, dan pangkat dan 2) cara mudah untuk menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi syarat TTF. Artikel pertama dimuat dalam Jurnal Pendidikan, Humaniora, dan Sains PPs IKIP Malang pada Bulan April tahun 1995 dan ringkasannya dimuat di Bengkulu Ekspres, 2008. Artikel tersebut mengkaji hubungan antara deret aritmatik, barisan geometri, dan pangkat. Berdasarkan hasil kajian ditemukan bahwa ada saling hubungan antara deret aritmatik, barisan geometri, dan pangkat serta beberapa keistimewaan. Hubungan ketiga rumusan matematika itu ada karena beda antarsuku-bilangan berurutan dari barisan geometri ($U_n = n^x$) selalu ajeg. Keajegan beda bilangan berurutan itu merupakan salah satu ciri dari barisan aritmatik. Jumlah suku ke n dari barisan aritmatik adalah deret aritmatik. Barisan geometri ($U_n = n^x$) merupakan pangkat (Riyanto, 1995 dan Riyanto, 2008a).

Artikel kedua diseminarkan dalam Kongres Nasional Matematika XIV, di Palembang pada bulan Juli 2008. Dalam makalah tersebut dipaparkan cara mudah untuk menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi syarat TTF. Ternyata, jika $X^2 + Y^2 = Z^2$ agar X , Y , dan Z bilat positif maka $Z = (X^2 + 1)/2$, $Y = Z - 1$, untuk $X =$ biljil

≥ 3 . Kelipatan dari persamaan yang dihasilkan, juga merupakan bilangan yang memenuhi syarat TTF. Belakangan, tepatnya pada tanggal 18 Desember 2021 ditemukan cara lain, yaitu: $Z = 4\sum n + 1$;

$$X = \sqrt{2Z - 1} \text{ . } Y = Z - 1, \text{ dan } n \geq 1$$

Buku ini penting karena cara penyelesaian yang ada saat ini, dirasakan sulit untuk menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi syarat TTF. Dua cara yang ada dan dirasakan sulit tersebut adalah cara penyelesaian dengan teorema pythagoras dan kombinasi faktorisasi.

Buku ini diperuntukkan bagi para mahasiswa, guru, dosen, peneliti bidang matematika dan peminat matematika. Semoga buku ini dapat memudahkan para pembaca dalam mencari bilangan-bilangan yang memenuhi TTF.

BAB 2

SEJARAH SINGKAT PEMBUKTIAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT



Fermat (1601—1685) mewariskan teorema terakhir. Teorema tersebut merupakan teka-teki yang menantang pemikir-pemikir matematika. Fermat mengatakan bahwa $x^n + y^n = z^n$ dengan x, y, z , dan n bilangan positif, tidak ada jawaban jika $n > 2$. Misalnya $3 + 4 = 7$ dan $3^2 + 4^2 = 5^2$. Fermat mengatakan dapat membuktikan rumus itu, namun disebabkan tempat yang terbatas maka bukti itu tidak dapat disampaikan. Teorema itu dikenal sebagai Teorema Terakhir Fermat (Naga, 1980; Kato, Kurokawa, dan Saito 1996; Gullberg, 1997). Sempat diragukan apakah pada waktu itu Fermat telah menemukan pembuktian yang tidak keliru (Naga, 1980).

Banyak matematikawan, setelah Fermat meninggal, punya obsesi untuk membuktikan TTF. Pada tahun 1908 ahli matematika Wolfkehl melalui akademi ilmu pengetahuan di Gotingen menyediakan hadiah 10.000 Mark bagi mereka yang pertama dapat membuktikan secara lengkap dalil itu. Alih-alih mendapatkan hadiah bagi siapa yang memecahkannya, TTF tetap tak terpecahkan. TTF merupakan teorema dengan banyak bukti yang salah. Sebagai contoh 1000 bukti yang salah telah diterbitkan antara tahun 1908 dan 1912. Satu-satunya kemajuan positif adalah hasil komputasi yang menunjukkan bahwa bukti penyangkal hanya bisa didapatkan untuk bilangan yang sangat besar. Dengan

menggunakan teknik yang dipakai Kummer, TTF terbukti benar, dengan bantuan komputer untuk n sampai dengan 4.000.000 pada tahun 1993 (http://id.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat).

Diawali oleh Kummer yang merintis teori bilangan-bilangan ideal untuk menyelesaikan TTF. Bahkan Kummer (1810—1893) dalam usaha untuk membuktikannya sampai menemukan teori ideal pada aljabar tinggi. Kummer mampu membuktikan bahwa teorema itu benar untuk bilangan-bilangan eksponen, yang dapat dibagi dengan bilangan-bilangan prima biasa. • Semua itu hanya berlaku bagi bilangan prima tanpa pola di bawah 100, yaitu: 37, 59 dan 67. Penggunaan bilangan prima sudah diawali oleh Euler yang mampu membuktikan untuk $n = 3$ dan $n = 4$, disusul oleh, Legendre (1752—1833) dan Dirichlet (1810—1893) yang membuktikan untuk $n = 5$. Dengan cara yang sama pada tahun 1830, Lamé dan Lebesgue mampu membuktikan untuk $n = 7$. Gauss sebenarnya sudah berusaha membuktikan sebelum akhirnya menyerah (Naga, 1980; Gullberg, 1997; Al-afkar, 2009). Pada tahun 1955 Selfridge, Nicol, dan Vandiver dengan bantuan komputer SWAC membuktikan untuk n sampai dengan 4003 serta untuk sejumlah n lainnya yang bernilai tertentu (Naga, 1980 dan http://id.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat). Germain mengatakan bahwa jika n dan $2n + 1$ bilangan prima maka $x^n + y^n = z^n$ mengakibatkan salah satu dari x, y, z habis dibagi n . Dengan demikian Teorema Terakhir Fermat terbagi ke dalam dua kasus. Kasus 1: Tidak ada satupun dari x, y, z yang habis dibagi n . Kasus 2: Hanya satu di antara x, y, z yang habis dibagi n . Pada tahun 1941, Lehmer dan Lehmer mengembangkan teorema Germain untuk semua bilangan prima kurang dari 253.47.899 (Gullberg, 1997).

Kepenasaran diteruskan oleh Dedekind yang mengembangkan teori ideal, yang merupakan abstraksi dari bilangan-bilangan ideal Kummer. Karya Dedekind ini mengilhami

Mazur dan karya Mazur menjadi acuan Wiles untuk membuktikan TTF. Tidak mau kalah dengan kiprah matematikawan Jerman, Poincare dari Perancis pada tahun 1895 menerbitkan buku berjudul *Analysis Situs*. Penjelasan Poincare diawali dengan melakukan penelitian terhadap fungsi Sinus dan Cosinus dari deret Fourier, sebelum akhirnya menggunakan cara invarian. Suatu fungsi invarian dalam kelompok-kelompok transformasi dikenal dengan nama bentuk-bentuk otomorphik. Fungsi tersebut terus dikembangkan oleh Poincare sehingga diperoleh bentuk-bentuk modular, yang terletak pada setengah sisi atas bidang bilangan kompleks, dan merupakan geometri hiperbolik. Tahun 1983, Faltings juga berusaha membuktikan TTF. Faltings, dalam upaya membuktikan, mengisolasi TTF ke dalam teori bilangan. Penemuan Faltings ini, menjadi “senjata” • dua matematikawan, Granville dan Heath-Brown, untuk menemukan beberapa solusi dalam penyelesaian TTF (Al-afkar, 2009).

Pada tahun 1983, upaya pembuktian teorema untuk n sampai dengan satu juta, dan pada tahun 1992 ditingkatkan lagi menjadi n sampai dengan empat juta. Ada sekelompok orang yang bernaung di bawah nama Bourbaki, yang gemar melakukan diskusi matematika sambil duduk minum kopi. Cetusan ide ini terjadi di Paris oleh matematikawan universitas Paris. Anggota utama kelompok ini adalah Weil, yang kemudian migrasi ke Amerika dan berada di Princeton. Anggota lain adalah Dieudonne yang mengarang makalah dengan nama samaran Bourbaki. Weil, pada kisaran tahun 1950-an, pernah bertemu dengan Taniyama dan Shimura di Jepang. Taniyama berteman dengan Shimura. Pada September 1955, di Tokyo diadakan simposium dengan topik teori bilangan aljabarik. Pada kesempatan ini, Weil yang sudah meninggalkan Perancis dan menjadi profesor di Universitas Chicago termasuk salah satu undangan. Pada tahun 1950, Weil mengejutkan komunitas matematika pada kongres internasional,

dengan mengemukakan dugaan Hasse. Kedatangan Weil ini menarik perhatian Taniyama dan Shimura sehingga mereka terlibat diskusi. Matematikawan asing lain yang datang adalah Serre dari Perancis, meskipun bukan termasuk kelompok Bourbaki, namun ikut terlibat diskusi ketiga matematikawan di atas. Hasilnya adalah muncul dugaan Shimura. Beberapa tahun kemudian Serre pindah ke Princeton sedangkan Taniyama tetap di Tokyo.

Dugaan Shimura ini menyebutkan bahwa setiap kurva eliptik dengan bilangan-bilangan rasional adalah seragam dalam bentuk modular. Awal tahun 1960-an, Shimura sudah di Princeton dan bertemu kembali dengan Serre. Serre tetap tidak mau mengakui dugaan Shimura dan mencari dukungan dari Weil. Weil tetap tidak mau mengakui kesahihan dugaan Shimura. Tahun-tahun berlalu dan pada tahun 1970-an, Weil mengesampingkan dugaan Shimura, dan mencetuskan dugaan Weil-Taniyama yang menyebut kurva-kurva eliptik modular yang kemudian disebut dengan kurva-kurva Weil. Seiring dengan munculnya “dugaan Weil-Taniyama”, Serre yang tetap melakukan penelitian tentang topik itu lebih percaya kepada Weil dan tetap mengingkari nama Shimura. Frey pada tahun 1978, terpengaruh oleh makalah “Kurva-kurva modular dan ideal dari Einstein” karya Mazur dari Universitas Harvard, pemikiran pakar teori bilangan Ribet dari Berkeley, dan Wiles dari Princeton. Frey tertarik menekuni aplikasi kurva-kurva modular dan representasi dari Galois tentang teori kurva-kurva eliptik. Frey, pada tahun 1981, berangkat ke universitas Harvard dan melakukan diskusi dengan Mazur, disusul ke Berkeley bertemu dengan Ribet. Pulang ke Jerman, Frey membawa banyak pemikiran baru, dan pada tahun 1984 penelitiannya tentang teori bilangan diungkapkan dalam konferensi. Diungkapkannya bahwa apabila dugaan Shimura-Taniyama terbukti benar, maka TTF dapat dibuktikan. Pernyataan yang diucapkan Frey ini mengundang reaksi. Ribet yang menyatakan akan berpikir ulang dan Serre menyatakan

tidak setuju.

Ribet yang memutuskan untuk berpikir ulang tentang pernyataan Frey, mulai tertarik dengan TTF. Di bawah bimbingan dan pengaruh Ireland, Ribet mempelajari matematika dan tertarik dengan fungsi zeta, jumlah eksponensial, dan teori bilangan.. Ribet meraih gelar Ph.D. matematika dari Harvard dan menjadi profesor matematika pada universitas California dengan penelitian pada teori bilangan. Pada saat ada pertemuan matematika di California pada tahun 1985, Ribet mulai memikirkan kurva Frey dan pernyataan Frey yang mengasosiasikan kurva elips yang berbeda dengan modular, yang terus terngiang di kepalanya sampai beberapa tahun ke depan. Ketika cuti mengajar di Berkeley, Ribet pergi ke Jerman dan melakukan penelitian matematika di Institut Max Planck. Di sini, Ribet hampir dapat membuktikan dugaan Frey. Ketika pulang ke Berkeley, Ribet menemui Mazur yang datang dari Harvard dan terlibat diskusi di kantin kampus Universitas California. Dalam diskusi singkat ini, ucapan Mazur memberi pencerahan kepada Ribet, yang serta merta mampu membuktikan bahwa dugaan Shimura-Taniyama adalah benar. Jalan untuk membuktikan TTF terbuka. Namun, ketika sedang berada di Perancis (1985-1986), Ribet terhentak karena ada penemuan, yaitu pembuktian yang dilakukan oleh Frey, sedangkan Ribet mengembangkan ide Mazur dan Serre bahwa TTF dapat dibuktikan lewat dugaan Shimura-Taniyama dan setiap kurva elips yang diketahui mengandung bilangan-bilangan rasional adalah modular. Apabila: $a^n + b^n = c^n$ adalah contoh TTF dan dibandingkan dengan kurva elips: $y^2 = x(x + a^n)(x + b^n)$ bukanlah modular, sehingga tidak dapat membuktikan dugaan Shimura-Taniyama. Dugaan ini terus dikembangkan oleh Shimura yang sudah ada di Princeton yang kemudian disebut dengan dugaan Shimura. Dugaan Shimura menyebutkan bahwa setiap kurva eliptik dengan menggunakan bilangan-bilangan rasional adalah seragam

yaitu dalam bentuk modular.

Pembuktian perdana • bulan Juli tahun 1993, Wiles terbang menuju Inggris. Wiles Kembali ke Universitas Cambridge yang sudah ditinggalkannya selama lebih dari 20 tahun. Pembimbing tesis doctoral di Cambridge, Profesor Coates, memprakarsai konferensi tentang teori Iwasawa, suatu bidang dalam teori bilangan yang menjadi topik disertasinya dan sangat dikuasainya. Mantan mahasiswanya ini ditanya, topik apa yang akan dibawakan? Dan apakah waktu satu jam untuk presentasi memadai? Wiles tidak menjawab pertanyaan pertama namun menjawab pertanyaan kedua dengan mengatakan bahwa presentasinya akan memakan waktu tiga jam.

Hampir selama enam tahun Wiles, berusaha membuktikan TTF, dengan bekerja secara diam-diam. Rupanya otaknya sudah buntu, sehingga pada Januari 1993, idenya untuk membuktikan TTF dibocorkan kepada orang yang amat sangat dipercayainya agar rela membantu. Orang yang diajak berunding adalah profesor Katz, rekannya di universitas Princeton. Agar diskusi di antara mereka tidak dicurigai, maka dibuat “skenario” Wiles menawarkan pelajaran tambahan kepada Katz. Bulan Mei 1993, Wiles membuka makalah Mazur dari Harvard, yang berisikan penemuan-penemuan terbaru dalam teori bilangan, “penemuan” yang memberi inspirasi bagi pakar pada bidang ini termasuk Ribet dan Frey, yang memberi jalan bagi Wiles. Apa yang dikatakan Mazur bahwa himpunan kurva eliptik dapat didasarkan pada bilangan prima. Ide ini mampu menjawab hambatan Wiles.

Pembuktian tidak dikirim untuk menghindari publikasi sehingga membuat orang terpicu untuk ikut-ikutan membuktikan TTF yang sudah matang guna meraih ketenaran diri. Makalah pembuktian setebal 200 halaman, mengundang keingintahuan para pakar dalam teori bilangan. Ribet yang melihat makalah itu bertanya apakah pembuktian ini disertai dengan sistem Euler?

Meskipun makalah sudah dibawa Wiles, namun Katz tetap memeriksa setiap baris pembuktian dan menanyakan hal-hal yang tidak jelas kepada Wiles lewat email sehari dua kali. Sampai akhirnya, Katz menemukan “celah” pembuktian seperti yang disebutkan oleh Ribet, yaitu sistem Euler. Penemuan kesalahan pembuktian ini membuat runtuh semua harapan Wiles. Wiles kembali ke Princeton bulan September 1993, hatinya dipenuhi: rasa malu, terhina, marah, frustrasi, semua bercampur menjadi satu. Janji pembuktian TTF yang dicanangkan hanya membuat namanya tercemar. Simpati datang dari sesama matematikawan dan menyediakan diri membantu membangun pembuktian lagi. Taylor dari Cambridge datang ke Princeton untuk membantu Wiles (Al-fakar, 2009). Taylor menyarankan sebagai usaha terakhir untuk memperluas metode Fach seperlunya dan Wiles meskipun yakin bahwa itu tidak akan berhasil, setuju untuk mencobanya terutama untuk meyakinkan Taylor bahwa hal tersebut tidak akan pernah berhasil. Wiles mengerjakannya sekitar dua minggu lamanya, kemudian tiba-tiba suatu inspirasi muncul. Pada tanggal 6 Oktober, Wiles mengirimkan bukti baru kepada tiga koleganya termasuk Falting. Semua bukti yang diberikan lebih sederhana daripada yang sebelumnya. Falting mengirimkan penyederhanaan terhadap beberapa bagian. Tidak ada bukti dengan tingkat kerumitan seperti ini dijamin benar, jadi sejumlah kecil masih disangsikan untuk beberapa waktu. Namun ketika Taylor memberikan kuliah pada British Mathematical Colloquium di Edinburgh bulan April 1995 dia memberikan kesan bahwa tidak ada kesangsian yang tersisa terhadap Teorema Terakhir Fermat (http://id.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat).

BAB 3

HUBUNGAN ANTARA BARISAN GEOMETRI ($U_n = n^x$), DERET ARITMATIK, DAN PANGKAT SERTA KEINDAHANNYA



3.1 Pendahuluan

Dalam buku yang berjudul berhitung: sejarah dan pengembangannya yang ditulis oleh Naga (1980), dijelaskan bahwa ada teka teki sederhana yang sudah tiga abad belum terpecahkan. Teka teki tersebut dikenal dengan Teorema Terakhir Fermat (TTF). Saat membacanya pada awal tahun 1990, penulis tertarik untuk memecahkannya. Belum selesai membuktikan TTF, pada tahun 1994 mendengar kabar bahwa Andrew Wiles ahli matematika dari Inggris sudah dapat membuktikannya. Dalam kurun 5 tahun saat proses pembuktian TTF, ditemukan pola hubungan yang menarik, seperti: 1) hubungan antara barisan geometri ($U_n = n^x$), deret aritmatik, dan pangkat, serta 2) keindahannya seperti: a) keteraturan besar beda suku bilangan berurutan barisan geometri, dan b) menghitung kuadrat dan deret aritmatik $\{S_{n(a)}\}$ dengan cepat. Berikut ini akan dipaparkan setiap rumus yang ditemukan.

3.2 Hubungan Antara Barisan Geometri ($U_n = n^x$), Deret Aritmatik, dan Pangkat

Barisan aritmatik merupakan suatu barisan yang mempunyai beda di antara dua suku yang berurutan selalu ajeg dan memiliki besar beda yang sama (Riyanto, 1995). Deret aritmatik

adalah jumlah aljabar dari suku-suku suatu barisan aritmatik. Barisan geometri adalah barisan yang mempunyai perbandingan yang ajeg dari masing-masing suku terhadap suku sebelumnya (Hassi, Nicky, Mawardi, dan Sukarsa, 1987).

Berdasarkan hasil coba-coba ditemukan bahwa barisan geometri, deret aritmatik, dan pangkat saling berhubungan. Selisih bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^x$ selalu ajeg. Beda yang ajeg itu merupakan salah satu ciri dari barisan aritmatik. Ciri lain barisan aritmatik adalah besar beda harus sama. Besar beda yang sama antarsuku-bilangan dapat diperoleh dengan cara mengurangi suku-bilangan berurutan dari deret pangkat secara terus menerus sebanyak besar pangkat (x). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ada korelasi antara besarnya pangkat dari barisan geometri ($U_n = n^x$) dengan tahap selisih suku-bilangan berurutan dari barisan geometri yang merupakan bentuk suatu barisan aritmatik. Contoh: Jika barisan geometri mempunyai $U_n = n^1$ maka urutan bilangan barisan geometri tersebut merupakan suatu bentuk barisan aritmatik. Untuk barisan geometri dengan $U_n = n^2$, beda suku bilangan berurutan dari barisan geometri pada tahap kedua merupakan barisan aritmatik. Demikian juga untuk barisan geometri dengan $U_n = n^3$. Jika barisan geometri dengan $U_n = n^3$ maka pada tahap ketiga merupakan barisan aritmatik. Kaidah ini berlaku hingga barisan geometri dengan $U_n = n^x$, yaitu beda bilangan berurutan dari barisan geometri pada tahap ke x itu yang merupakan barisan aritmatik.

3.3 Penjelasan Teorema

Untuk menjelaskan teorema di atas, secara berurutan disajikan beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri yang memiliki $U_n = n^1, \dots, U_n = n^5$, serta contohnya.

3.3.1 Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n$

$$b = n - (n-1)1 = 1$$

Contoh 3.1:

U_n	b
1	
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

3.3.2 Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^2$

$$b = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$b' = (2n-1) - \{2(n-1) - 1\} = 2$$

Contoh 3.2:

n	n^2	b	b'
1	1	3	2
2	4		
3	9	5	2
4	16		
5	25	7	2
6	36		
7	49	9	2
8	64		
9	81	11	2
10	100		

3.3.3 Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^3$

$$b = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$b' = (3n^2 - 3n + 1) - \{3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1\} = 6n - 6$$

$$b'' = (6n - 6) - \{6(n-1) - 6\} = 6$$

Contoh 3.3:

n	n^3	b	b'	b''
1	1			
2	8	7	12	6
3	27	19	18	6
4	64	37	24	6
5	125	61	30	6
6	216	91	36	6
7	343	127	42	6
8	512	169	48	6
9	729	217	54	6
10	1000	271		

3.3.4 Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^4$

$$b = n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

$$b' = (4n^3 - 6n^2 + 4n - 1) - \{4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1\}$$

$$b'' = (12n^2 - 12n + 4 - \{12(n-1) - 6\}) + 4 = 12n^2 - 24n + 14$$

$$b''' = 12n^2 - 24n + 14 - \{12(n-1) - 6\} = 24n - 36$$

$$b'''' = (24n - 36) - \{24(n-1) - 36\} = 24$$

Contoh 3.4:

Pangkat 4

n	n^4	b	b'	b''	b'''
1	1				
2	16	15	50	60	24
3	81	65	110	84	24
4	256	175	194	108	24
5	625	369	302	132	24
6	1296	671	434	156	24
7	2401	1105	590	180	24
8	4096	1695	770	204	24
9	6561	2465	974		
10	10000	3439			

3.3.5 Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^5$

$$b = n^5 - (n-1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$$

$$\begin{aligned} b' &= (5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1) - \{5(n-1)^4 - 10(n-1)^3 + 10(n-1)^2 - 5(n-1) + 1\} \\ &= 20n^3 - 30n^2 + 20n - 5 - (30n^2 - 30n + 10) + 20n - 10 - 5 \\ &= 20n^3 - 60n^2 + 70n - 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'' &= (20n^3 - 60n^2 + 70n - 30) - \{20(n-1)^3 - 60(n-1)^2 + 70(n-1) - 30\} \\ &= 60n^2 - 60n + 20 - (120n - 60) + 70 = 60n^2 - 180n + 150 \end{aligned}$$

$$b''' = 60n^2 - 180n + 150 - \{60(n-1)^2 - 180(n-1) + 1150\} = 120n - 60 - 180 = 120n - 240$$

$$b'''' = 120n - 240 - \{120(n-1) - 240\} = \mathbf{120}$$

Contoh 3.5:

Pangkat 5

n	n^4	b	b'	b''	b'''	b''''
1	1	31	180	390	360	120
2	32	211	570	750	480	120
3	243	781	1320	1230	600	120
4	1024	2101	2550	1830	720	120
5	3125	4651	4380	2550	840	120
6	7776	9031	6930	3390	960	120
7	16807	15961	10320	4350		
8	32768	26281	14670			
9	59049	40951				
10	100000					

3.4 Keindahan-Keindahan Hubungan

Berdasarkan pada kajian hubungan antarrumusan barisan, deret, dan pangkat ditemukan beberapa keindahan sebagai berikut.

3.4.1 Keteraturan Besar Beda (b)

Beda suku-bilangan yang berurutan pada tahap akhir dari barisan geometri dengan $U_n = n^x$ memiliki besar yang teratur. Besar beda tahap akhir pada barisan geometri tersebut sama dengan “jumlah hasil kali dari besarnya pangkat”. Misalnya, barisan geometri dengan $U_n = n^1$ memiliki $b = 1$; barisan geometri dengan $U_n = n^2$ memiliki $b = 2$, berasal dari 1×2 ; barisan geometri dengan $U_n = n^3$ memiliki $b = 6$, berasal dari $1 \times 2 \times 3$; barisan geometri dengan $U_n = n^4$ memiliki $b = 24$, berasal dari $1 \times 2 \times 3 \times 4$; barisan geometri dengan $U_n = n^5$ memiliki $b = 120$, berasal dari $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$; dan barisan geometri dengan $U_n = n^6$ memiliki $b = 720$, berasal dari $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$. Berdasarkan uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa ada hubungan antara besarnya pangkat (x) pada barisan geometri ($U_n = n^x$) dengan besarnya beda tahap akhir.

Secara ringkas, beda tahap akhir dari barisan geometri dengan $U_n = n^x$ dapat dicari dengan cara berikut.

Jika $U_n = n^1$ maka $b_1 = 1$

Jika $U_n = n^2$ maka $b_2 = b_1 \times 2 = 1 \times 2 = 2$

Jika $U_n = n^3$ maka $b_3 = b_2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Jika $U_n = n^4$ maka $b_4 = b_3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Jika $U_n = n^5$ maka $b_5 = b_4 \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

Jika $U_n = n^6$ maka $b_6 = b_5 \times 6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

Jika $U_n = n^x$ maka $b_x = b_{(x-1)} \cdot x = 1.2.3.4.5.6.7. \dots x$.

Dengan keteraturan ini dapat ditebak berapa beda tahap akhir suku-bilangan yang berurutan (b) dari barisan geometri dengan $U_n = n^x$. Untuk menebaknya dapat digunakan rumus $b_n = n!$ karena $b_1 = 1$ dan b_n merupakan jumlah perkalian dari besarnya pangkat. Dengan demikian, besarnya beda tahap akhir dapat dicari sebagai berikut.

Untuk pangkat 5, $b_5 = 5.4.3.2.1. = 120$

Untuk pangkat 6, $b_6 = 6.5.4.3.2.1 = 720$

Untuk pangkat 10, $b_{10} = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800$

Untuk pangkat 11, $b_{11} = 11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 30016800$ dst.

3.4.2 Menghitung Deret Aritmatik dan Pangkat Dua dengan Cepat

Dalam kajian selanjutnya ada tiga notasi yang jika tidak diperhatikan dapat membingungkan. Ketiga notasi tersebut adalah U_n untuk notasi barisan geometri, $S_{n(a)}$ untuk notasi deret aritmatik, dan $U_{n(a)}$ untuk notasi barisan aritmatik.

Beda suku bilangan berurutan pada barisan geometri dengan $U_n = n^2$ merupakan barisan aritmatik yang mempunyai $a = 1$ dan $b = 2$. Deret aritmatik adalah jumlah suku-suku bilangan dari barisan aritmatik. Besar suku-suku bilangan barisan geometri itu sama dengan hasil kuadrat ($U_n = n^2$). Karena itu, barisan aritmatik yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$, jumlah suku ke n $\{S_{n(a)}\} = n^2$. Jadi, $U_n = S_{n(a)} = n^2$. Dengan demikian, $S_{n(a)}$ dari suatu barisan yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$, dapat dihitung dengan cara mengkuadratkan suku-bilangan yang dicari. Sebaliknya jika akan mencari hasil kuadrat dari suatu bilangan dapat dicari dengan menggunakan rumus $S_{n(a)}$.

3.4.2.1 Menghitung Kuadrat dengan Cepat

Berdasarkan uraian di atas, untuk menghitung hasil kuadrat dari suatu bilangan dapat digunakan 2 cara, yaitu: 1) persamaan $n^2 = (n-1)^2 + 2n-1$ dan 2) persamaan $S_{n(a)} = n^2$. Keunggulan cara pertama yaitu lebih cepat dalam penghitungan jika hasil kuadrat dari bilangan urutan sebelumnya sudah dihafal atau sudah diketahui. Keunggulan cara kedua dapat digunakan menghitung deret dengan cepat.

Bagi kita tentu sudah hafal hasil kuadrat dari bilangan berikut ini, seperti $5^2 = 25$, $10^2 = 100$, $15^2 = 225$, $25^2 = 625$, $100^2 =$

10000, dan seterusnya. Jika sudah hafal maka dengan mudah dapat dihitung hasil dari 6^2 , 11^2 , 16^2 , 51^2 , dan 101^2 . Penghitungan cara ini sangat membantu perhitungan kuadrat angka besar tanpa kalkulator.

Contoh 3.6:

1. Jika $n = 26$, maka $26^2 =$

$$n^2 = (n-1)^2 + 2n - 1$$

$$26^2 = 25^2 + 2 \cdot 26 - 1$$

$$26^2 = 625 + 52 - 1$$

$$26^2 = 625 + 51 = 676.$$
2. Jika $n = 51$ maka $51^2 = 2500 + 101 = 2601$
3. Jika $n = 101$ maka $101^2 = 10000 + 201 = 10201.$

3.4.2.2 Menghitung deret aritmatik $\{S_{n(a)}\}$ dengan cepat

Untuk menghitung besarnya deret aritmatik $\{S_{n(a)}\}$ dari suatu barisan aritmatik yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$ dapat digunakan persamaan $S_{n(a)} = n^2$.

Contoh 3.7

1. Carilah besar jumlah suku $\{S_{n(a)}\}$ ke 15, ke 21, dan ke 225 pada suatu barisan yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$.

Jawab

$$S_{15(a)} = 15^2 = 225$$

$$S_{21(a)} = 21^2 = 441$$

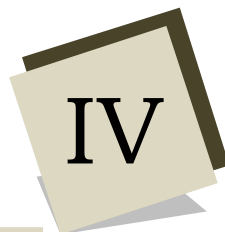
$$S_{225(a)} = 225^2 = 50625$$

3.5 Penutup

Berdasarkan hasil kajian ditemukan beberapa rumus yang sangat menarik, seperti: 1) hubungan antara barisan geometri ($U_n = n^x$), deret aritmatik, dan pangkat, 2a) keteraturan besar beda suku bilangan berurutan barisan geometri, dan 2b) menghitung kuadrat dan deret aritmatik $\{S_{n(a)}\}$ dengan cepat.

BAB 4

CARA MUDAH MENEMUKAN BILANGAN TEOREMA TERAKHIR FERMAT (TTF)



4.1 Pendahuluan

Fermat (1601—1685) mewariskan teorema terakhir. Teorema tersebut merupakan teka-teki yang menantang pemikir-pemikir matematika. Fermat mengatakan bahwa $x^n + y^n = z^n$ dengan x , y , z , dan n bilangan positif, tidak ada jawaban jika $n > 2$. Misalnya $3 + 4 = 7$ dan $3^2 + 4^2 = 5^2$. Fermat mengatakan dapat membuktikan rumus itu, namun disebabkan tempat yang terbatas maka bukti itu tidak dapat disampaikan. Teorema itu dikenal sebagai Teorema Terakhir Fermat (Kato, Kurokawa, dan Saito 1996; Gullberg, 1997). Sempat diragukan apakah pada waktu itu Fermat telah menemukan pembuktian yang tidak keliru (Naga, 1980). Beberapa ahli matematika telah berusaha membuktikan tetapi banyak yang tidak berhasil. Akhirnya, Wiles, ahli matematika dari Inggris pada tahun 1994 mampu membuktikan TTF. Pengakuan tersebut disampaikan oleh Taylor saat memberikan kuliah pada *British Mathematical Colloquium di Edinburgh* bulan April 1995 dia memberikan kesan bahwa tidak ada kesangsian yang tersisa terhadap Teorema Terakhir Fermat (http://id.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat).

TTF sudah terbukti, pertanyaan berikutnya adalah bilangan-bilangan berapa sajakah yang memenuhi syarat TTF?. Beberapa ahli telah menemukan persamaan bilangan yang memenuhi syarat

TTF. Berdasarkan teorema phitagoras, misalnya $5^2 = 4^2 + 3^2$; $5^2 + 12^2 + 13^2$; $8^2 + 15^2 = 17^2$. Bahkan 4000 tahun yang lalu bangsa Babilonia telah menemukan persamaan $119^2 + 120^2 = 169^2$ (Kato, Kurokawa, dan Saito 1996). Dalam bab lain (jawaban latihan) Kato, Kurokawa, dan Saito (1996) ada bukti bahwa $65^2 = 63^2 + 16^2$. Hasil persamaan tersebut diperoleh dari mengombinasikan faktorisasi $5 = (2 + i)(2 - i)$ dan $13 = (3 + 2i)(3 - 2i)$. Kedua cara tersebut, yaitu: cara teorema phitagoras dan cara kombinasi faktorisasi tidak mudah dioperasionalkan untuk mendapatkan bilangan-bilangan lain yang memenuhi syarat TTF. Persoalan yang muncul adalah bagaimanakah cara yang mudah untuk menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi syarat TTF?

4.2 Pemecahan

Untuk menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi syarat TTF digunakan metode induksi dan dilanjutkan dengan deduksi. Menurut Suriasumantri (1985) dan Naga (1980) ada banyak cara untuk membuktikan suatu rumusan matematika, yaitu: intuisi, coba-coba, induksi, deduksi, rasional, dan lain-lain. Dalam kajian ini digunakan metode induksi.

Pemecahannya dimulai dari hubungan barisan dan deret. Ada tiga konsep yang perlu dipahami, yaitu: 1) barisan aritmatik merupakan suatu barisan yang mempunyai besar beda sama di antara dua suku yang berurutan dan selalu ajeg (Riyanto, 1995); 2) deret aritmatik adalah jumlah aljabar dari suku-suku suatu barisan aritmatik; dan 3) barisan geometri adalah barisan yang mempunyai perbandingan dari masing-masing suku terhadap suku sebelumnya ajeg (Hassi, Nicky, Mawardi, dan Sukarsa, 1987).

Berdasarkan hasil penelaahan, ditemukan bahwa barisan geometri, deret aritmatik, dan pangkat saling berhubungan. Selisih bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^x$ selalu ajeg. Beda yang ajeg itu merupakan salah satu ciri dari barisan

aritmatik. Ciri lain barisan aritmatik adalah besar beda harus sama. Besar beda antarsuku-bilangan yang sama dapat diperoleh dengan cara mengurangi suku-bilangan berurutan secara terus menerus sebanyak besar pangkat (x). Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa ada korelasi antara besarnya pangkat dari barisan geometri ($U_n = n^x$) dengan tahap selisih suku-bilangan berurutan dari barisan geometri tersebut. Contoh: Jika barisan geometri mempunyai $U_n = n^1$ maka urutan bilangan barisan geometri tersebut merupakan suatu bentuk barisan aritmatik. Untuk barisan geometri dengan $U_n = n^2$, beda suku bilangan berurutan dari barisan geometri pada tahap kedua itulah yang merupakan barisan aritmatik. Demikian juga untuk barisan geometri dengan $U_n = n^3$. Kaidah ini berlaku sampai dengan barisan geometri dengan $U_n = n^x$. Beda bilangan berurutan dari barisan geometri pada tahap ke (x) itulah yang merupakan barisan aritmatik. Paparan penjelasan tersebut dapat dilihat pada Bab 3.

4.2.1 Mencari bilangan-bilangan dari Teorema Terakhir Fermat (TTF)

Dengan menggunakan persamaan beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $U_n = n^x$, dapat dicari TTF, sebagai berikut.

a. $n - (n - x) = x$

Jika $x = 1$, maka $n - (n - 1) = 1$

b1. $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$

b2. $n^2 - (n - 2)^2 = 4n - 4$ (= lipatan 2 dari b1)

b3. $n^2 - (n - 3)^2 = 6n - 9$ (= lipatan 3 dari b1)

b4. $n^2 - (n - 4)^2 = 8n - 16$ (= lipatan 4 dari b1)

c. $n^3 - (n - 1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

d. $n^4 - (n - 1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

e. $n^5 - (n - 1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$

Jika $x = 1$, maka persamaan a dapat ditulis $n - (n-1) = 1$ atau $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ atau $n^2 - (n-1)^2 = (\sqrt[2]{2n-1})^2$ atau $n^2 = (n-1)^2 + (\sqrt[2]{2n-1})^2$. Persamaan tersebut dapat ditulis $X^2 = Y^2 + Z^2$. Dengan demikian, persamaan $n^2 - (n-1)^2 = (\sqrt[2]{2n-1})^2$ dapat digunakan untuk mencari bilangan TTF. Cara yang mudah adalah mencari besar n dari $\sqrt[2]{2n-1}$ yang hasilnya bilangan positif (Riyanto, 2008b).

Menurut Riyanto (2008b) untuk mencari besar n dari $\sqrt[2]{2n-1}$ agar hasilnya bilat positif maka n adalah bijil positif (teorema 1).

Contoh 4.1:

Jika $n = 3$, maka $\sqrt[2]{2.3-1} = \sqrt[2]{5} = 2,22$ (tidak bulat)

Jika $n = 5$, maka $\sqrt[2]{2.5-1} = \sqrt[2]{9} = 3$

Jika $n = 13$, maka $\sqrt[2]{2.13-1} = \sqrt[2]{25} = 5$

Jika $n = 25$, maka $\sqrt[2]{2.25-1} = \sqrt[2]{49} = 7$

Jika $n = 41$, maka $\sqrt[2]{2.41-1} = \sqrt[2]{81} = 9$

Jika $n = 61$, maka $\sqrt[2]{2.61-1} = \sqrt[2]{121} = 11$,

Jika $n = 85$, maka $\sqrt[2]{2.85-1} = \sqrt[2]{169} = 13$, dst

Berdasarkan paparan di atas, n yang memiliki hasil positif dari $\sqrt[2]{2n-1}$ adalah $n = 5, 13, 25, 41, 61, 85$, dst. Angka-angka tersebut merupakan deret hitung dengan $a = 5$ dan $b_1 = 8, b_2 = 12, b_3 = 16, b_4 = 20, b_5 = 24$, dst. Selisih beda antarsisa $b = 4$. Beda

antarsuku bilangan sama merupakan barisan, sehingga angka-angka n yang memenuhi syarat agar hasil dari $\sqrt[3]{2n-1}$ positif dapat diperoleh untuk nilai deret ke n (S_n) = $4 \sum_{i=1}^n n + 1$

Rumus $4 \sum_{i=1}^n n + 1$ diperoleh dari persamaan berikut.

$$n_1 = 5 = 4 + 1$$

$$n_2 = 13 = 5 + 8 = 4 + 1 + 2 \cdot 4$$

$$n_3 = 25 = 5 + 8 + 12 = 4 + 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$$

$$n_4 = 41 = 5 + 8 + 12 + 16 = 4 + 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4$$

$$n_5 = 61 = 5 + 8 + 12 + 16 + 20$$

$$n_6 = 85 = 5 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 4 + 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4$$

atau

$$n_1 = 1 \cdot 4 + 1 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$n_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 = (1 + 2)4 + 1$$

$$n_3 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = (1 + 2 + 3)4 + 1$$

$$n_4 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = (1 + 2 + 3 + 4)4 + 1$$

$$n_5 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)4 + 1$$

$$n_6 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)4 + 1$$

Berdasarkan pola di atas dapat dirumuskan bahwa

$$n = 4 \sum_{i=1}^n n + 1$$

4.2.2 Pengembangan Teorema Terakhir Fermat

Cara I

Jika $X^2 + Y^2 = Z^2$ agar X, Y, dan Z bilat positif maka

$$X = \sqrt{2y+1} \text{ atau } X = \text{bijil} \geq 3$$

$$Z = (X^2 + 1)/2$$

$$Y = Z - 1 \quad [\text{Riyanto. 2008b dan Riyanto. 2008c}]$$

Bukti:

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \quad \dots\dots 1$$

$$Z = (X^2 + 1)/2 \quad \dots\dots 2$$

$$Y = Z - 1 \quad \dots\dots\dots 3$$

$$Z = Y + 1 \quad \dots\dots\dots 4$$

$$Y + 1 = (X^2 + 1)/2 \text{ (substitusi persamaan 4 dengan 2)}$$

$$2Y + 2 = X^2 + 1 \quad \dots\dots 5$$

$$2Y + 1 = X^2 \quad \dots\dots\dots 6$$

$$2Y + 1 + Y^2 = (Y + 1)^2 \text{ (substitusi persamaan 6 dan 4 dengan 1)}$$

$$2Y + 1 + Y^2 = Y^2 + 2Y + 1 \quad (\square = \text{terbukti})$$

Perhatikan pola persamaan-persamaan contoh 4.1, hasilnya memiliki keteraturan. Hasil $\sqrt[2]{2n-1}$ selalu bijil dan memiliki selisih 2, sesuai dengan teorema 1. Berdasarkan pola itu untuk mencari bilangan TTF dapat ditempuh dengan cara berikut.

Jika $X^2 + Y^2 = Z^2$ agar X, Y, dan Z bilat positif maka

$$X = \text{bijil} \geq 3$$

$$Z = (X^2 + 1)/2$$

$$Y = Z - 1$$

Contoh .4.2:

Jika $X = 3$, $Z = 5$ dan $Y = 4$ atau $5^2 = 4^2 + 3^2$

- 1) Jika $X = 5$, $Z = 13$ dan $Y = 12$ atau $13^2 = 12^2 + 5^2$
- 2) Jika $X = 7$, $Z = 25$ dan $Y = 24$ atau $25^2 = 24^2 + 7^2$
- 3) Jika $X = 9$, $Z = 41$ dan $Y = 40$ atau $41^2 = 40^2 + 9^2$
- 4) Jika $X = 11$, $Z = 61$ dan $Y = 60$ atau $61^2 = 60^2 + 11^2$
- 5) Jika $X = 13$, $Z = 85$ dan $Y = 84$ atau $85^2 = 84^2 + 13^2$
- 6) Jika $X = 10001$, $Z = 50010001$, dan $Y = 50010000$ atau $50010001^2 = 10001^2 + 50010000^2$ dst.

Kelipatan hasil persamaan di atas juga diperoleh hasil persamaan yang memenuhi syarat TTF. Contoh hasil persamaan yang memenuhi syarat TTF yang merupakan kelipatan, disajikan sebagai berikut.

1. $5^2 = 4^2 + 3^2$;
 $10^2 = 8^2 + 6^2$; (2x)
 $20^2 = 16^2 + 12^2$; (3x)
 $30^2 = 24^2 + 18^2$; (4x)
 $40^2 = 32^2 + 24^2$; (5x)
2. $13^2 = 12^2 + 5^2$;
 $26^2 = 24^2 + 10^2$;
 $39^2 = 36^2 + 15^2$;
 $52^2 = 48^2 + 20^2$;
 $65^2 = 61^2 + 25^2$;
 $78^2 = 72^2 + 30^2$;
3. $25^2 = 24^2 + 7^2$;
 $50^2 = 48^2 + 14^2$;
 $75^2 = 72^2 + 21^2$;
 $100^2 = 96^2 + 28^2$;
 $125^2 = 120^2 + 35^2$;

$$\begin{aligned}
4. \quad &41^2 = 40^2 + 9^2; \\
&82^2 = 80^2 + 18^2; \\
&123^2 = 120^2 + 27^2; \\
&164^2 = 160^2 + 36^2; \\
&205^2 = 200^2 + 45^2; \quad \text{dst.}
\end{aligned}$$

Cara II

Kita dapat memperoleh bilangan-bilangan Z dengan cara menentukan n , n merupakan bilat positif ≥ 1 . Jika n sudah ditentukan maka bilangan Z , X dan Y , dapat dicari dengan rumus berikut.

$$Z = 4\sum n + 1$$

$$X = \sqrt{2Z - 1} \quad \text{..... (adopsi dari cara I)}$$

$$Y = Z - 1 \quad \text{..... (adopsi dari cara I)}$$

$$n \geq 1$$

Contoh 4.3:

$$n = 1$$

$$Z = 4(1) + 1 = 5$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 5 - 1}$$

$$X = 3$$

$$Y = 4$$

$$\text{Jadi, } 5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$n = 2$$

$$Z = 4(1 + 2) + 1 = 13$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 13 - 1}$$

$$X = 5$$

$$Y = 12$$

$$\text{Jadi, } 13^2 = 5^2 + 12^2$$

$$n = 3$$

$$Z = 4(1 + 2 + 3) + 1 = 25$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 25 - 1}$$

$$X = 7$$

$$Y = 24$$

$$\text{Jadi, } 25^2 = 7^2 + 24^2$$

$$n = 4$$

$$Z = 4(1 + 2 + 3 + 4) + 1 = 41$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 41 - 1}$$

$$X = 9$$

$$Y = 40$$

$$\text{Jadi, } 41^2 = 9^2 + 40^2$$

$$n = 5$$

$$Z = 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 1 = 61$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 61 - 1}$$

$$X = 11$$

$$Y = 60$$

$$\text{Jadi, } 61^2 = 11^2 + 60^2$$

$$n = 6$$

$$Z = 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 1 = 85$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 85 - 1}$$

$$X = 13$$

$$Y = 84$$

$$\text{Jadi, } 85^2 = 13^2 + 84^2$$

$$n = 7$$

$$Z = 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 1 = 113$$

$$X = \sqrt{2 \cdot 113 - 1}$$

$$X = 15$$

$$Y = 112$$

$$\text{Jadi, } 113^2 = 15^2 + 112^2$$

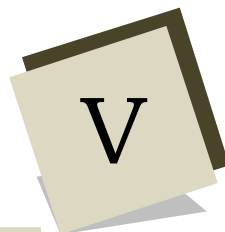
dan seterusnya

4.3 Penutup

Berdasarkan kajian dapat disimpulkan bahwa untuk mencari bilangan Fermat ada 2 cara, yaitu: 1) jika $X^2 + Y^2 = Z^2$ agar X , Y , dan Z bilat positif maka $X = \text{bijil} \geq 3$, $Z = (X^2 + 1)/2$, dan $Y = Z - 1$, serta kelipatannya atau 2) $Z = 4 \sum_{i=1}^n n + 1$, $X = \sqrt{2Z - 1}$, dan $Y = Z - 1$ serta kelipatannya. . Perlu dilakukan pembuktian untuk pangkat > 2 .

BAB 5

SAJAK TENTANG FERMAT



Bab ini berisi sajak tentang Fermat. Sajak tentang Fermat merupakan sajak yang menceritakan proses pemecahan Teorema Terakhir Fermat, Sajak ini ditulis saat mengkaji Teorema Terakhir Fermat (TTF). Saat itu, penulis tertarik dengan bacaan yang mengungkapkan bahwa belum ada ahli yang dapat membuktikan teorema tersebut, padahal teorema tersebut sederhana, bahkan ada ahli yang meragukan kebenarannya. Ada 2 sajak yang ditulis, yaitu Fermat dan Fermat 1. Fermat ditulis saat teorema terakhir Fermat belum terpecahkan dan Fermat 1, ditulis setelah teorema terakhir Fermat dapat dipecahkan dan penulis memperoleh cara menemukan bilangan-bilangan yang memenuhi syarat TTF dengan mudah. Berikut ini, disajikan sajak-sajak tersebut.

FERMAT

Kau wariskan pada kami
Suatu teka teki
Yang sampai kini belum terbukti
Kau bilang bisa menjawab
Sayang ruangan tak muat
Hingga kau wafat
Teka teki belum terjawab
Kau seorang pengacara
Kau pusingkan pakar matematika
Dengan teka-teki sederhana

Bengkulu, 8 Februari 1994
Riyanto

(Riyanto, 1994)

FERMAT 1

Hai Fermat

Kau memang hebat

Kau lontarkan teorema, sebelum wafat

Hingga membuat pusing pakar matematika sejagat

Kau bilang punya jawaban

Tapi para kolega sempat ragukan

Sekian lama kolega pikirkan

Akhirnya ditemukan jawaban

Bahkan kini ada formula

untuk temukan bilangan yangenuhi syarat

bagi Teorema Terakhir Fermat

Bengkulu, 2 Juli 2008

Riyanto

(Riyanto, 2008d)

DAFTAR PUSTAKA

- Al-afkar, Wahyu, 2009. Pemecah Theorema Terakhir Fermat Andrew Wiles (1879 – 1955).
<http://wahyumatics.blogspot.com/2009/08/pemecah-theorema-terakhir-fermat.html>
- Gullberg, Jan. 1997. *Mathematics from the birth of numbers* New York: W.W. Norton & Company.
http://id.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat. Fermat, de Pierre. dari Wikipedia Indonesia, ensiklopedia bebas berbahasa Indonesia. Diunduh 8 April 2007.
- Hassi, R. Nicky, T. Mawardi, dan Sukarsa, 1988. *Kamus matematika: Inggris-Indonesia*. Bandung: Tarsito.
- Kato, K., Kurokawa, N., dan Saito, T. 1996. *Translations of mathematical monographs vol 186. number theory 1. Fermat's dream* (terjemahan Kuwata, M.). American mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- Naga, Dali S. 1980. *Berhitung: Sejarah dan pengembangannya*. Jakarta: Gramedia.
- Riyanto. 1994. Puisi Fermat. *Matematika Puisi*. Tidak diterbitkan.
- Riyanto. 1995. Hubungan antara barisan geometri ($U_n = n^x$), deret aritmatik, dan pangkat, *Jurnal Pendidikan Humaniora dan Sains*, tahun 1, nomor 2, April 1995. Hal. 12-23.

- Riyanto. 2008a. Keistemewaan hubungan antara barisan aritmatik, deret, dan deret pangkat. *Bengkulu Ekspres*. Kolom Iptek. 20 April 2008
- Riyanto. 2008b. Cara mudah mencari bilangan-bilangan dari dalil fermat terakhir. *Bengkulu Ekspres*. Kolom Iptek. 9 Maret 2008
- Riyanto. 2008c. Cara mudah mencari bilangan-bilangan dari dalil fermat terakhir. *Prosiding Seminar Nasional Matematika XIV. Juli 2008*
- Riyanto. 2008d. Puisi Fermat 1. *Matematika Sajak*. Tidak diterbitkan.
- Suriasumantri, Y. (1985). *Ilmu dalam Perspektif. Sebuah kumpulan karangan tentang hakikat ilmu*. Jakarta: Obor Indonesia, Leknas, dan LIPI.



LAMPIRAN 1. DAFTAR ISTILAH

BILANGAN

Bilangan bulat = bilat

Bilangan genap = binap

Bilangan ganjlt = bijil

Bilangan negatif = bineg

Bilangan positift = bipos

Bilangan khayal = bikha

Bilangan khayal logatirma = bikhalog

Bilangan khayal nol = bikhanol

PENAMBAHAN (+)

$P + Q = R$

P = Tertambah

Q = Penambah

R = Tambahan

PENGURANGAN (-)

$$P - Q = R$$

P = Berkurang

Q = Pengurang

R = Kurangan

PERKALIAN (x; .; *)

$$P \times Q = PQ = R$$

P = Berkali

Q = Pengali

R = Kalian

PEMBAGIAN (:; /; --)

$$A : B = A/B = \frac{A}{B} = C$$

A = Pembilang = Terbagi

B = Penyebut = Pembagi

C = Hasil bagi = Bagian

PERPANGKATAN

$$A^n = C$$

A^n = A pangkat n

A = Terpangkat

n = Pangkat

C = Pangkatan

PENAKARAN

$$\sqrt[n]{x} = R$$

$\sqrt[n]{x}$ = Pengakaran n terhadap x

$\sqrt[n]{}$ = Pengakaran n

$\sqrt{}$ = Akar

x = Terakar

n = Pengakar

R = Akaran

PERSAMAAN

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

$X^2 + Y^2$ = ekspresi kiri

Z^2 = ekspresi kiri

Hasil persamaan = silmaan



RIWAYAT HIDUP

Riyanto adalah guru besar teknologi pendidikan, Lahir di Tuban pada tanggal 22 Juni 1960. Gelar sarjana Pendidikan jurusan Pendidikan Mesin diperoleh di Fakultas Teknologi dan Kejuruan IKIP Surabaya (sekarang FT Unesa) tahun 1983. Magister Pendidikan bidang Teknologi pembelajaran diperoleh di FPS IKIP Malang (sekarang PPS UM) pada tahun 1988, dan doktor bidang teknologi pembelajaran diperoleh di PPS UM pada tahun 1994.

Sejak tahun 1989 dia mengajar di FKIP Universitas Bengkulu. Pada tahun 1986 menulis buku Tali Kawat Baja dan direvisi pada tahun 1991, Buku lain yang ditulis dan adalah Bilangan Khayal Baru, Keindahan Matematika, Matematika dan Kreativitas, Cara Menghitung Cepat dan Mudah, Cara mudah Mencari Bilangan Fermat, Metodologi Penelitian Matematika, Matematika Kalender, dan Kemampuan Berfikir Mendalam dalam Matematika.