

PERSAMAAN-PERSAMAAN UNIK UNTUK PANGKAT $N \leq 5$

Riyanto

Dosen Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP Universitas Bengkulu

Email: riyanto_unib@yahoo.com

Abstrak. Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan. Dalam matematika dikenal beberapa macam persamaan, di antaranya adalah persamaan linier, kuadrat, pangkat tiga, dan seterusnya. Beberapa persamaan memiliki keunikan, seperti pythagoras, Terorema Terakhir Fermat, persamaan Madachy, dan lain-lain. Dalil Pythagoras yang terkenal adalah dalam segitiga dinyatakan bahwa sisi miring kuadrat = jumlah kuadrat dari sisi siku-sikunya. Fermat mengatakan bahwa $x^n + y^n = z^n$ dengan x, y, z , dan n bilangan positif, tidak ada jawaban jika $n > 2$. Madachy (1979) menemukan bilangan-bilangan yang sama dengan jumlah kuadrat dari dua pilahan bilangan tersebut, seperti: a) $1233 = 12^2 + 33^2$, b) $8833 = 88^2 + 33^2$, c) $10100 = 10^2 + 100^2$, d) $5882353 = 588^2 + 2353^2$. Adakah persamaan unik yang lain? Berdasarkan kajian ditemukan beberapa persamaan yang memiliki bentuk unik. 1) persamaan kuadrat, seperti: 1a) $a^2 = b^2 + c^2$, 1b) $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, 1c) persamaan kuadrat berurutan $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 + \dots + (x+x)^2 = (x+x+1)^2 + (x+x+2)^2 + (x+x+3)^2 + (x+x+4)^2 + (x+x+x)^2$; 2) persamaan pangkat 3 seperti: 2a) $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, 2b) $\frac{x^3 - x}{6} = y$, jika x adalah bilat positif ≥ 2 maka y adalah bilat positif; 3) persamaan bilangan pangkat 4, seperti $a^4 = b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + f^4$; dan 4) persamaan bilangan pangkat 5, seperti $a^5 = b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + f^5 + g^5$. Dari tujuh bentuk persamaan unik tersebut, ada 2 bentuk persamaan, yaitu persamaan pangkat 4 dan 5 yang belum ditemukan rumusnya.

Kata kunci: persamaan, pangkat, dan unik

1. Pendahuluan

Menurut Rota (2003) dalam matematika, keunikan sering dikaitkan dengan kesederhanaan bukti yang diberikan. Suatu bukti dikatakan unik jika bukti itu dapat membuka rahasia dari teorema dan mengandung sesuatu yang baru. Komponen estetika dari matematika merupakan tenaga penggerak dari dalam yang kuat untuk melakukan penelitian. Ada keunikan yang ditemukan dalam definisi, teorema, dan bukti [1].

Mereka yang berminat mengkaji matematika seringkali menjumpai suatu aspek estetika tertentu dalam matematika. Banyak matematikawan berbicara tentang *keanggunan* matematika, estetika yang tersirat, dan keunikannya. Dalam kesederhanaan dan keanggunan bukti yang diberikan terdapat keunikan, seperti bukti Euclid yakni terdapat tak-terhingga banyaknya bilangan prima, dan di dalam metode numerik yang anggun dalam perhitungan kecepatan, yakni Transformasi Fourier Cepat.

Dalam *Beauty of Numbers* (2000) Hardy menunjukkan kemiripan antara matematika dan seni: “matematikawan seperti pelukis atau pujangga”. Mereka adalah pembuat pola. Pola matematikawan lebih permanen daripada pelukis dan pujangga disebabkan matematika disusun dengan ide-ide. Pelukis membuat pola dengan bentuk dan warna, sedangkan Pujangga membuat puisi dengan kata-kata. Hardy menyatakan bahwa tidak ada tempat yang permanen di dunia ini bagi matematika yang tidak cantik. Menurut Hardy penelitian tidak harus memiliki aplikasi langsung dan ia mendukung penelitian matematika murni. Bahkan dia menyatakan semakin tidak memiliki aplikasi langsung semakin baik penelitian tersebut [2].

Persamaan antara seni dan matematika mengindikasikan bahwa proses kreativitas tak mengenal batas-batas subjektif-objektif. Bagi para matematikawan, spiral pada cangkang nautilus menimbulkan ketakjuban karena mengikuti deret Fibonacci (1,1, 2, 3, 5, 8, ...), sedangkan bagi seniman atau pujangga, keunikan nautilus mampu menjadi inspirasi bagi paduan warna-warni di kanvas ataupun kata-kata puitis. Masih banyak lagi keunikan-keunikan dalam matematika, seperti adanya skala Pythagoras yang ditemukan dalam musik gubahan Bach dan Chopin. Begitu pula dalam rancangan bangunan Panthenon di Athena yang mengikuti kaidah segiempat emas. Posisi ka'bah dengan tepian kutub, jumlah kelopak bunga, panjang bagian tubuh manusia juga memiliki perbandingan emas [3].

Ada cerita menarik **yang dialami oleh Wolfskehl**. Ia bukan matematikawan, melainkan industriawan dari Jerman. Wolfskehl ini hidupnya diselamatkan oleh matematika. Suatu hari ia berniat mengakhiri hidupnya, entah karena masalah percintaan atau karena penyakit yang dideritanya. **Wolfskehl** bahkan sudah merencanakan tanggal dan pukul berapa ia akan bunuh diri dan menyiapkan pistol untuk kemudian diarahkan ke kepalanya. Beberapa jam sebelum ingin menembak dirinya, ia mengunjungi perpustakaan pribadinya dan menemukan sebuah makalah tentang teorema yang sangat terkenal, yaitu *Teorema Terakhir Fermat*. Ia mulai membaca, dan tidak membutuhkan waktu lama untuk ia tenggelam dalam kesibukannya. Bukannya memikirkan mengenai bunuh diri, ia sibuk berpikir bagaimana cara memecahkan persoalan yang ada pada makalah tersebut. Meskipun, perjuangannya untuk memecahkan soal tersebut gagal, namun tepat setelah itu dia sadar bahwa waktu yang ia tentukan untuk menembak dirinya sudah lewat. Ia pun terkagum dengan keunikan yang dialami dalam memecahkan persoalan dan membatalkan niatnya untuk bunuh diri. Sebagai “balas jasa”, ia menyelenggarakan lomba dengan hadiah 100.000 Marks bagi siapa yang dapat memecahkan permasalahan *Teorema Terakhir Fermat*. Hadiah ini kemudian dikenal dengan nama hadiah Wolfskehl [2].

Dalam persamaan juga terdapat keunikan, di antaranya adalah pythagoras, teorema terakhir Fermat, persamaan Madachy, dan lain-lain. Dalil Pythagoras yang terkenal adalah dalam segitiga dinyatakan bahwa sisi miring kuadrat = jumlah kuadrat dari sisi siku-sikunya. Fermat mengatakan bahwa $x^n + y^n = z^n$ dengan x, y, z , dan n bilangan positif, tidak ada jawaban jika $n > 2$. Misalnya $3 + 4 = 7$ dan $3^2 + 4^2 = 5^2$. Madachy (1979) juga menemukan bilangan-bilangan yang sama dengan jumlah kuadrat dari dua pilahan bilangan tersebut, seperti: a) $1233 = 12^2 + 33^2$, b) $8833 = 88^2 + 33^2$, c) $10.100 = 10^2 + 100^2$, dan d) $588.2353 = 588^2 + 2353^2$ [4].

Adakah persamaan unik yang lain? Berdasarkan hasil kajian ditemukan beberapa persamaan unik. Dalam artikel ini dipaparkan beberapa persamaan unik, di antaranya persamaan kuadrat, persamaan pangkat tiga, empat, dan lima. Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah sama dan ditulis dengan tanda sama dengan (=). Berikut ini secara berurutan disajikan keunikan persamaan tersebut.

2. Persamaan Kuadrat

a. Pengembangan Teorema Terakhir Fermat

Jika $X^2 + Y^2 = Z^2$ agar X, Y , dan Z bilangan bulat positif maka

$$X = \text{bilangan ganjil} \geq 3$$

$$Z = (X^2 + 1)/2$$

$$Y = Z - 1 \quad [5 \text{ dan } 6]$$

Bukti:

$$1a1. 5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$1a2. 13^2 = 12^2 + 5^2$$

$$1a3. 25^2 = 24^2 + 7^2$$

$$1a4. 41^2 = 40^2 + 9^2$$

$$1a5. 61^2 = 60^2 + 11^2$$

$$1a6. 85^2 = 84^2 + 13^2$$

$$1a7. 313^2 = 312^2 + 25^2$$

$$1a8. 50010001^2 = 10001^2 + 50010000^2$$

b. Kelipatan perkalian

Bukti 1a1. $5^2 = 4^2 + 3^2$, dikalikan $2^2, 4^2, 6^2, 8^2$, dan 10^2 , sebagai berikut.

$$10^2 = 8^2 + 6^2; 20^2 = 16^2 + 12^2; 30^2 = 24^2 + 18^2; 40^2 = 32^2 + 24^2; 50^2 = 40^2 + 30^2;$$

Bukti 1a2. $13^2 = 12^2 + 5^2$, dikalikan $2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, dan 6^2 , sebagai berikut.

$$26^2 = 24^2 + 10^2; 39^2 = 36^2 + 15^2; 52^2 = 48^2 + 20^2; 65^2 = 61^2 + 25^2; 78^2 = 72^2 + 30^2;$$

Bukti 1a3. $25^2 = 24^2 + 7^2$, dikalikan $2^2, 3^2, 4^2$, dan 5^2 , sebagai berikut.

$$50^2 = 48^2 + 14^2; 75^2 = 72^2 + 21^2; 100^2 = 96^2 + 28^2; 125^2 = 120^2 + 35^2;$$

Bukti 1a4. $41^2 = 40^2 + 9^2$, dikalikan $2^2, 3^2, 4^2$, dan 5^2 , sebagai berikut.

$$82^2 = 80^2 + 18^2; 123^2 = 120^2 + 27^2; 164^2 = 160^2 + 36^2; 205^2 = 200^2 + 45^2; \text{ dan}$$

seterusnya.

c. Penguraian

Beberapa persamaan kuadrat di atas dapat digabungkan, sehingga menghasilkan bentuk persamaan unik baru, seperti berikut ini.

1c1. Persamaan bukti 1a1 disubstitusikan pada satu suku persamaan bukti 1a2

$$13^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$$

1c2. Persamaan bukti 1a2 disubstitusikan pada satu suku persamaan bukti 1a6

$$85^2 = 84^2 + 12^2 + 5^2$$

1c3. Persamaan bukti 1a1 disubstitusikan pada satu suku penguraian 1b2

$$85^2 = 84^2 + 12^2 + 4^2 + 3^2$$

1c4. Persamaan bukti 1a7 disubstitusikan pada satu suku persamaan bukti 1a3

$$313^2 = 312^2 + 24^2 + 7^2$$

Silahkan dikaji lagi untuk bilangan yang lain!

d. Persamaan Kuadrat Berurutan

Dalam Blog Indriatisukorini (2010) dan beberapa blog yang lain dituliskan empat persamaan sebagai berikut [7].

$$1d1. 32 + 42 = 52;$$

$$1d2. 102+112+122 = 132 +142;$$

$$1d3. 212 + 222 + 232 + 242 = 252 +262 +272; \text{ dan}$$

$$1d4. 362 +372 +382 + 392 + 402 = 412 +422 +432 +442.$$

Awalnya keempat persamaan tersebut dianggap salah, namun setelah dihitung ulang ternyata hanya salah penulisan. Penulisan yang betul, seperti berikut ini.

$$1d1. 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$1d2. 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$1d3. 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$1d4. 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

Jika diperhatikan keempat persamaan berurutan di atas, suku awalnya memiliki pola tertentu, yaitu dimulai dari 3 untuk persamaan 1d1, 10 untuk persamaan 1d2, 21 untuk persamaan 1d3, dan 36 untuk persamaan 1d4. Selisih suku awal (b') adalah 7, 11, dan 15. Ketiga angka tersebut, yaitu 7, 11, dan 15 masing-masing memiliki selisih (b'') = 4. Hasil tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$Un \quad b' \quad b''$$

$$3$$

$$\} 7$$

$$10 \quad \} 4$$

$\} 11$
 21 $\} 4$
 $\} 15$
 36 Jika dilanjutkan maka diperoleh
 $\} 19$
 55
 $\} 23$
 78

Apakah suku awal 55 dan 78 memenuhi syarat persamaan berurutan? Marilah kita perhatikan bukti berikut.

Bukti 1d5:

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 64^2 + 65^2 + 66^2$$

Bukti 1d6

$$78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$$

Ternyata betul.

Cara mencari suku awal (Un)

Berdasarkan hasil di atas, Un untuk persamaan kuadrat berurutan, diperoleh dari:

$$U_1 = 3$$

$$U_2 = U_1 + 3 + 4(n-1) \rightarrow U_2 = 3 + 3 + 4.1 = 3.2 + 4.1$$

$$U_3 = U_2 + 3 + 4(n-1) \rightarrow U_3 = 3 + 3 + 4.1 + 3 + 4.2 = 3.3 + 4(1+2)$$

$$U_4 = U_3 + 3 + 4(n-1) \rightarrow U_4 = 3 + 3 + 4.1 + 3 + 4.2 + 3 + 4.3 = 3.4 + 4(1+2+3)$$

$$U_5 = U_4 + 3 + 4(n-1) \rightarrow U_5 = 3 + 3 + 4.1 + 3 + 4.2 + 3 + 4.3 + 3 + 4.4 = 3.5 + 4(1+2+3+4)$$

$$U_6 = U_5 + 3 + 4(n-1) \rightarrow U_6 = 3 + 3 + 4.1 + 3 + 4.2 + 3 + 4.3 + 3 + 4.4 + 3 + 4.5 = 3.6 + 4(1+2+3+4+5)$$

$$U_n = 3n + 4 \sum_{i=1}^{n-1} n$$

Jadi, suku awal untuk persamaan berurutan dapat dihitung dengan rumus:

$$U_n = 3n + 4 \sum_{i=1}^{n-1} n$$

U_n = suku awal dari ekspresi kiri

U_n yang pertama = 3

Jumlah *suku* pada ekspresi kiri = $n + 1$

Jumlah *suku* pada ekspresi kanan = n

$n = 1$ untuk persamaan berurutan pertama

$n = 2$ untuk persamaan berurutan kedua

$n = 3$ untuk persamaan berurutan ketiga, dan seterusnya

Bukti:

$$1d7. \text{ Jika } n = 1, \text{ maka } U_n = 3 + 4.(0) = 3$$

$$1d8. \text{ Jika } n = 2, \text{ maka } U_n = 3.2 + 4.(1) = 10$$

$$1d9. \text{ Jika } n = 3, \text{ maka } U_n = 3.3 + 4.(1+2) = 9 + 12 = 21$$

$$1d10. \text{ Jika } n = 4, \text{ maka } U_n = 3.4 + 4.(1+2+3) = 12 + 24 = 36$$

$$1d11. \text{ Jika } n = 5, \text{ maka } U_n = 3.5 + 4.(1+2+3+4) = 15 + 40 = 55$$

dan seterusnya

Penerapan

$$1. \text{ Jika } n = 7 \text{ maka } U_n = 3.7 + 4(1+2+3+4+5+6) = 21 + 84 = 105$$

Jumlah suku pada ekspresi kiri = 8 dan pada ekspresi kanan = 7

Bukti 1d12

$$105^2 + 106^2 + 107^2 + 108^2 + 109^2 + 110^2 + 111^2 + 112^2 = 113^2 + 114^2 + 115^2 + 116^2 + 117^2 + 118^2 + 119^2$$

2. Jika $n = 8$ maka $Un = 3.8 + 4(1+2+3+4+5+6+7) = 24 + 112 = 136$

Jumlah ekspresi kiri = 9 dan ekspresi kanan = 8

Bukti 1d13

$$136^2 + 137^2 + 138^2 + 139^2 + 140^2 + 141^2 + 142^2 + 143^2 + 144^2 = 145^2 + 146^2 + 147^2 + 148^2 + 149^2 + 150^2 + 151^2 + 152^2$$

3. Jika $n = 9$ maka $Un = 3.9 + 4(1+2+3+4+5+6+7+8) = 27 + 140 = 167$

Jumlah ekspresi kiri = 10 dan ekspresi kanan = 9

Bukti 1d14

$$167^2 + 168^2 + 169^2 + 170^2 + 171^2 + 172^2 + 173^2 + 174^2 + 175^2 + 176^2 = 177^2 + 178^2 + 179^2 + 180^2 + 181^2 + 182^2 + 183^2 + 184^2 + 185^2$$

4. Jika $n = 10$ maka $Un = 3.10 + 4(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 30 + 176 = 206$

Jumlah ekspresi kiri = 11 dan ekspresi kanan = 10

Bukti 1d15

$$206^2 + 207^2 + 208^2 + 209^2 + 210^2 + 211^2 + 212^2 + 213^2 + 214^2 + 215^2 + 216^2 = 217^2 + 218^2 + 219^2 + 220^2 + 221^2 + 222^2 + 223^2 + 224^2 + 225^2 + 226^2$$

5. Jika $n = 11$ maka $Un = 3.11 + 4(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 33 + 220 = 253$

Jumlah ekspresi kiri = 12 dan ekspresi kanan = 11

Bukti 1d16

$$253^2 + 254^2 + 255^2 + 256^2 + 257^2 + 258^2 + 259^2 + 260^2 + 261^2 + 262^2 + 263^2 + 264^2 = 265^2 + 266^2 + 267^2 + 268^2 + 269^2 + 270^2 + 271^2 + 272^2 + 273^2 + 274^2 + 275^2$$

6. Jika $n = 12$ maka $Un = 3.12 + 4(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11) = 36 + 264 = 300$

Jumlah ekspresi kiri = 13 dan ekspresi kanan = 12

Bukti 1d17

$$300^2 + 301^2 + 302^2 + 303^2 + 304^2 + 305^2 + 306^2 + 307^2 + 308^2 + 309^2 + 310^2 + 311^2 + 312^2 = 313^2 + 314^2 + 315^2 + 316^2 + 317^2 + 318^2 + 319^2 + 320^2 + 321^2 + 322^2 + 323^2 + 324^2$$

dan seterusnya

3. Persamaan Pangkat tiga dibagi 6 ($\frac{x^3 - x}{6} = y$)

Bilat pangkat 3 dengan pembagi 6, jika x adalah bilat positif ≥ 2 maka y adalah bilat positif [3]. Berikut disajikan beberapa bukti.

Bukti:

$$\frac{x^3 - x}{6} = y$$

Jika x diganti dengan bilat positif 2, maka harga y = bilat positif meskip un pembaginya bilangan 6. Harga y jika diuraikan dalam bentuk jumlah horizontal maka akan membentuk suatu bilangan lereng gunung, seperti berikut ini.

untuk $x = 2$ maka $y = 1$,

$x = 3$, maka $y = 4$

$x = 4$, maka $y = 10$

y = jumlah horizontal dari bilangan lereng gunung

$x = 2, y = 1$	1
$x = 3, y = 4$	2 2
$x = 4, y = 10$	3 4 3
$x = 5, y = 20$	4 6 6 4
$x = 6, y = 35$	5 8 9 8 5
$x = 7, y = 56$	6 10 12 12 10 6
$x = 8, y = 84$	7 12 15 16 15 12 7
$x = 9, y = 120$	8 14 18 20 20 18 14 8
$x = 10, y = 165$	9 16 21 24 25 24 21 16 9
$x = 11, y = 220$	10 18 24 28 30 30 28 24 18 10

Baris lereng merupakan barisan aritmatik dengan $a = x$ dan $b = x$

Lereng kiri = Lereng kanan

Lereng 1 = + 1

Lereng 2 = + 2

Lereng 3 = + 3

Lereng 4 = + 4

Lereng 5 = + 5

Lereng 6 = + 6

Lereng 7 = + 7

Lereng 8 = + 8

Lereng 9 = + 9

Lereng 10 = + 10

Lerengan yang ditegakkan

N	$x-1$	$2(x-2)$	$3(x-3)$	$4(x-4)$	$5(x-5)$	$6(x-6)$	$7(x-7)$	$8(x-8)$	$9(x-9)$	$10(x-10)$
$x = 2, y = 1$	1									
$x = 3, y = 4$	2	2								
$x = 4, y = 10$	3	4	3							
$x = 5, y = 20$	4	6	6	4						
$x = 6, y = 35$	5	8	9	8	5					
$x = 7, y = 56$	6	10	12	12	10	6				
$x = 8, y = 84$	7	12	15	16	15	12	7			
$x = 9, y = 120$	8	14	18	20	20	18	14	8		
$x = 10, y = 165$	9	16	21	24	25	24	21	16	9	
$x = 11, y = 220$	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10

b. Persamaan pangkat tiga

Persamaan unik pangkat tiga dapat dicari dari persamaan $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$. Persamaan tersebut dapat ditulis $X^3 + Y^3 = E$. Jadi, $E = 3x^2 - 3x + 1$ atau $E = (\sqrt[3]{3x^2 - 3x + 1})^3$. Hasil dari ekspresi $\sqrt[3]{3x^2 - 3x + 1}$ untuk x tertentu tidak dapat dihasilkan bilangan genap. Karena itu, ekspresi $3x^2 - 3x + 1$ harus diuraikan menjadi dua suku agar dihasilkan bilangan genap atau $E = R1$ dan $R2$. Dengan mengekstrak pengakaran tiga dari suku $R1$ dan $R2$ maka akan diperoleh bilat. Dengan demikian, persamaan pangkat tiga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x^3 - (x-1)^3 \\ = (\sqrt[3]{R1})^3 + (\sqrt[3]{R2})^3 \quad [4 \text{ dan } 5] \end{aligned}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} 2b1. \text{ jika } x = 6, \text{ maka } 6^3 - 5^3 &= (\sqrt[3]{91})^3; (\sqrt[3]{91})^3 = (\sqrt[3]{27})^3 + (\sqrt[3]{64})^3 \\ 6^3 - 5^3 &= 3^3 + 4^3; 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b2. \text{ jika } x = 9, \text{ maka } 9^3 - 8^3 &= (\sqrt[3]{217})^3; (\sqrt[3]{217})^3 = (\sqrt[3]{216})^3 + (\sqrt[3]{1})^3 \\ 9^3 - 8^3 &= 6^3 + 1^3; 1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b3. \text{ jika } x = 19, \text{ maka } 19^3 - 18^3 &= (\sqrt[3]{10271})^3; (\sqrt[3]{10271})^3 = (\sqrt[3]{27})^3 + (\sqrt[3]{1000})^3 \\ 19^3 - 18^3 &= 3^3 + 10^3; 3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3 \end{aligned}$$

$$2b4. \text{ Berdasarkan coba-coba: } 9^3 + 10^3 - 1^3 = 12^3$$

Kelipatan perkaliannya

Bukti 2b1. $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, dikalikan $2^3, 3^3, 4^3$, dan 5^3 , sebagai berikut.

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3; 9^3 + 12^3 + 15^3 = 18^3; 12^3 + 16^3 + 20^3 = 24^3; 15^3 + 20^3 + 25^3 = 30^3$$

Bukti 2b2. $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$, dikalikan $2^3, 3^3, 4^3$, dan 5^3 , sebagai berikut.

$$2^3 + 12^3 + 16^3 = 18^3; 3^3 + 18^3 + 24^3 = 27^3; 4^3 + 24^3 + 32^3 = 36^3; 5^3 + 30^3 + 40^3 = 45^3$$

Bukti 2b3. $3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3$, dikalikan $2^3, 3^3, 4^3$, dan 5^3 , sebagai berikut.

$$6^3 + 20^3 + 36^3 = 38^3; 9^3 + 30^3 + 54^3 = 57^3; 12^3 + 40^3 + 72^3 = 76^3; 15^3 + 50^3 + 90^3 = 95^3,$$

dst.

Substitusi 2 persamaan

1. Persamaan bukti 2b1 dan 2b2

$$8^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 1^3 = 9^3$$

2. Persamaan bukti 2b2 dan 2b4

$$10^3 + 8^3 + 6^3 = 12^3$$

3. Persamaan bukti 2b1 dan 2b4

$$10^3 + 8^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 = 12^3$$

4. Persamaan bilangan pangkat 4 [3]

Berdasarkan coba-coba ditemukan:

$$1. 15^4 = 14^4 + 9^4 + 8^4 + 6^4 + 4^4$$

Kelipatan perkalian:

$$30^4 = 28^4 + 18^4 + 16^4 + 12^4 + 8^4$$

$$60^4 = 56^4 + 36^4 + 32^4 + 24^4 + 16^4$$

Pola lain

$$\begin{aligned}11^4 + 3^4 &= 10^4 + 8^4 + 5^4 + 1^4 \\19^4 + 1^4 &= 18^4 + 13^4 - 8^4 + 5^4 + 4^4 \\22^4 + 3^4 &= 21^4 + 13^4 + 10^4 + 6^4 + 1^4 \\17^4 + 7^4 + 3^4 &= 15^4 + 13^3 + 9^4 + 4^4 \\17^4 + 2^4 + 1^4 &= 15^4 + 13^3 + 8^4 + 4^4 \\9^4 + 2^4 + 1^4 &= 8^4 + 7^4 + 3^4\end{aligned}$$

5. Persamaan bilangan pangkat 5 [3]

Berdasarkan coba-coba ditemukan:

$$12^5 = 11^5 + 9^5 + 7^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5$$

Kelipatan perkalian

$$\begin{aligned}24^5 &= 22^5 + 18^5 + 14^5 + 12^5 + 10^5 + 8^5 \\36^5 &= 33^5 + 27^5 + 21^5 + 18^5 + 15^5 + 12^5\end{aligned}$$

6. Simpulan dan Saran

Simpulan

Berdasarkan kajian diperoleh hasil bahwa ada persamaan-persamaan unik pada persamaan kuadrat, pangkat 3, 4, dan 5. Untuk persamaan pangkat 4 dan 5 belum ditemukan rumusnya.

Saran

Berdasarkan hasil kajian disarankan untuk melanjutkan kajian persamaan-persamaan bilangan unik, terutama untuk menemukan rumus pada persamaan unik untuk pangkat 4 dan 5. Selain itu, juga perlu dikaji untuk persamaan pangkat ≥ 6 .

Daftar Pustaka

- [1] Davis, P. 2007. "Mathematics and common sense".
<http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20071126184129AanJoOO>. Diunduh 29 Agustus 2010.
- [2] Beauty of Numbers. 2000. http://www.simonsingh.net/Beauty_of_Numbers.htm. Diunduh 29 Agustus 2010.
- [3] Riyanto. tt. *Keindahan Matematika*. Jakarta: Armandelta Selaras. (Proses terbit)
- [4] Madachy, J. S. 1979. *Madachy's Mathematical Recreations*. New York: Dover.
- [5] Riyanto. 2008a. Cara mudah mencari bilangan-bilangan teorema terakhir Fermat. *Bengkulu Ekspres*. Kolom Iptek. 9 Maret 2008
- [6] Riyanto. 2008b. Cara mudah mencari bilangan-bilangan teorema terakhir Fermat. *Prosiding Konggres dan seminar nasional matematika XIV*. Juli 2008.
- [7] Indriatisukorini. 2010. Keindahan matematika. <http://blog.unnes.ac.id/indriatisukorini/2010/01/17/>. Diunduh 22 November 2010.

