

BILANGAN KHAYAL LOGARITMA (kl):
Bilangan baru untuk menghitung logaritma berbilangan negatif
Riyanto

Staf Pengajar pada Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP UNIB

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan bilangan yang dapat digunakan untuk menghitung logaritma berbilangan negatif ($\log_a -X$) secara sederhana. Hal ini dilakukan karena sampai saat ini logaritma tersebut dihitung dengan cara yang rumit, sehingga penghitungan logaritma berbilangan negatif tidak dijelaskan dalam beberapa sumber yang sudah dibaca bahkan dalam beberapa buku dinyatakan hanya logaritma berbilangan positif saja yang terdefiniskan. Metode yang digunakan adalah analisis induktif, namun dalam pemaparan temuan disajikan secara deduktif. Hasil analisis ditemukan bahwa untuk menghitung logaritma berbilangan negatif secara sederhana digunakan bilangan khayal logaritma (kl).

Kata kunci: Bilangan, khayal, logaritma, negatif

Pendahuluan

Logaritma merupakan salah satu cara untuk menyederhanakan perhitungan. Penyederhanaannya adalah mengubah bentuk hitung perpangkatan menjadi perkalian, pengakaran menjadi pembagian, perkalian menjadi penjumlahan, dan pembagian menjadi bentuk hitung pengurangan. Dalam operasi hitung dikenal ada beberapa tanda hitung sederhana, yaitu $\times$, $:$, $+$, dan $-$, sehingga dalam operasi hitung akan ditemui banyak variasi perhitungan, misalnya perkalian antarbilangan positif, perkalian antarbilangan negatif, perkalian antara bilangan positif dan bilangan negatif, pembagian antar-bilangan negatif, perpangkatan bilangan negatif, pengakaran bilangan negatif, atau yang lain. Perhitungan tersebut seharusnya dapat dilakukan dengan logaritma. Persoalannya adalah sampai saat ini logaritma berbilangan negatif dihitung dengan cara yang rumit, sehingga penghitungan logaritma berbilangan negatif tidak dijelaskan dalam beberapa sumber, bahkan dalam beberapa buku dinyatakan hanya logaritma berbilangan positif saja yang terdefiniskan (lihat Hooper & Palsinelli, 1983 dan Syidsaeter & Hammond,

1995). Menurut Hooper dan Palsinelli, 1983; Nasution, 1997; Smith dan Boyle, 1985; $\log_a X$ merupakan lambang dari $\log X$ dengan basis a , dan $a > 0$. $\log_a X = Y$ bermakna bahwa $X = a^Y$, karena $a^Y > 0$ untuk semua bilangan nyata Y bila $a > 0$, maka haruslah $X > 0$. Jadi $\log_a X$ hanya didefinisikan bila $X > 0$. Pernyataan tersebut benar jika operasi hitung hanya dibatasi dalam daerah kerja himpunan bilangan nyata. Jika definisi logaritma di atas tidak dipahami secara cermat maka seolah-olah logaritma hanya dapat digunakan untuk memecahkan persoalan perhitungan bilangan positif, padahal tidak demikian. Dalam kamus matematika yang ditulis oleh James (1992) dijelaskan bahwa secara umum $\log_a (-n) = (2k + 1) \pi i + \log_a n$, di mana k adalah bilangan bulat, i adalah bilangan khayal, n adalah bilangan nyata, dan π adalah bilangan konstan (3,14). Cara ini cukup rumit karena melibatkan perkalian dari tiga unsur, yaitu satu peubah dan dua bilangan (bilangan khayal dan bilangan konstan). Wospatrik (1993) merumuskan $\ln -1 = e^{i(\pi + 2n\pi)}$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ atau $\ln -1 = i(2n + 1)\pi$ atau $\ln -1 = i\pi, -i\pi, 3i\pi, -3i\pi, \dots$ Menurut Churchill dan Brown (1990)

$\log -1 = (2n + 1) i\pi$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ secara khusus $\log -1 = i\pi$. Ketiga ahli, yaitu James (1992), Wospakrik (1993), dan Churchill dan Brown (1990) dalam memecahkan logaritma berbilangan negatif menggunakan cara yang sama yaitu menggunakan bilangan i dan π . Melihat rumitnya cara menghitung maka perlu ditemukan cara untuk menghitung $\log -1$ tersebut.

Mungkinkah ditemukan cara untuk menghitung Y , jika $a^Y < 0$, dan $a > 0$ dengan cara sederhana? Jika mungkin, jawabannya pasti bukan *bilangan nyata dan khayal (i)* karena *bilangan nyata* jika digunakan untuk memangkatkan suatu bilangan positif tidak menghasilkan bilangan negatif, sedangkan jika digunakan i cara yang ditempuh rumit. Karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menemukan bilangan baru yang dapat digunakan untuk menghitung logaritma berbilangan negatif dengan cara sederhana dan berlaku umum. Untuk memecahkan masalah tersebut dilakukan analisis induktif, namun dalam penulisannya dipaparkan secara deduktif.

Pemecahan

$Y = \log_a X$, jika $X > 0$ agar Y terdefiniskan maka $Y > 0$, benar jika Y bilangan nyata. Teorema tersebut benar jika operasi hitung hanya dibatasi dalam daerah kerja himpunan seluruh bilangan nyata. Pernyataan tersebut dijadikan sebagai **aksioma**.

$Y = \log_a X$, jika $X < 0$ agar Y terdefiniskan maka Y bukan bilangan nyata. Jika Y bukan bilangan nyata maka Y adalah bilangan khayal (i), namun jika digunakan i , rumusnya rumit. Jika

Y bukan bilangan nyata dan bukan i maka Y diduga adalah bilangan khayal logaritma disingkat kl , (**teorema baru**). Keyakinan ini didasarkan pada kenyataan bahwa hanya kl yang jika digunakan untuk memangkatkan suatu bilangan positif maka menghasilkan bilangan negatif. Pembuktian tersebut dimulai dari penyajian fungsi logaritma negatif dilanjutkan dengan analisis deduktif.

$$Y = \log_a -X \dots\dots\dots (1)$$

$$a^Y = -X \dots\dots\dots (2)$$

Agar perhitungan tidak bergantung pada besarnya bilangan yang dilambangkan X , maka $-X$ harus diuraikan menjadi $X \cdot -1$, sehingga persamaan 2 menjadi:

$$a^Y = X \cdot -1 \dots\dots\dots (3)$$

Untuk menghitung Y maka variabel pada kedua ruas persamaan harus dibuat bentuk logaritma.

$$\log a^Y = \log X \cdot -1 \dots\dots\dots (4)$$

$$Y \log a = \log X + \log -1 \dots\dots\dots (5)$$

$$Y = \log_a X + \log_a -1 \dots\dots\dots (6)$$

Untuk menyelesaikan persamaan 6, ada 2 konsep logaritma yang harus diselesaikan, yaitu $\log_a X$ dan $\log_a -1$. $\log_a X$ sudah terdefiniskan, sedangkan $\log_a -1$ sampai saat ini diselesaikan dengan cara yang rumit. Kerumitan pemecahan $\log_a -1$ karena melibatkan 3 kelompok bilangan. Agar logaritma berbilangan negatif dapat diselesaikan dengan cara yang mudah, maka $\log_a -1$ ditetapkan sebagai bilangan khayal logaritma (kl). Jika dugaan tersebut betul maka diperoleh hasil sebagai berikut: $kl = \log_a -1$ atau $a^{kl} = -1$. Dengan ditetapkannya bilangan kl , maka $a^{kl} \times a^{kl} = 1$, $a^{kl} \times a^{kl} \times a^{kl} = -1$, $a^{kl} \times a^{kl} \times a^{kl} \times a^{kl} = 1$, dst. Dengan diperolehnya hasil perkalian a^{kl} maka

logaritma berbilangan negatif dapat diselesaikan dengan cara yang mudah.

Dengan diterima $kl = \log_a -1$, maka persamaan 6 menjadi

$$Y = \log_a X + kl \dots\dots (7)$$

Jadi, $\log_a -X = \log_a X + kl \dots\dots (8)$ **Teorema baru terbentuk.**

Persamaan 8 berwujud bilangan kompleks logaritma dan merupakan teorema baru yang masih perlu dibuktikan kebenarannya. Pembuktian tersebut bertujuan untuk mengetahui apakah teorema itu berlaku umum atau hanya berlaku untuk bilangan tertentu saja. Berikut ini adalah pembuktian teorema baru tersebut.

Pembuktian

Untuk membuktikan teorema baru akan diberikan beberapa contoh perhitungan yang terdiri atas penyederhanaan fungsi logaritma negatif serta penerapan perhitungan perkalian dan pembagian bilangan negatif dengan berbantuan logaritma.

Penyederhanaan fungsi logaritma berbilangan negatif

- a. Sederhanakan fungsi logaritma

$$Y = \log_{10} -1000$$

$$\text{Jawab : } Y = \log_{10} 1000. -1$$

$$Y = \log_{10} 10^3 + \log_{10} -1$$

$$Y = 3 + kl$$

- b. Selesaikan fungsi logaritma

$$Y = \log -10000 + \log -1000$$

$$\text{Jawab: } Y = \log 10000. -1 + \log 1000. -1$$

$$Y = \log 10^4 + \log -1 + \log 10^3 + \log -1$$

$$Y = 4 + kl + 3 + kl$$

$$Y = 7 + 2kl$$

- c. Sederhanakan fungsi logaritma

$$Y = \log -10000 + \log -1000 + \log -100$$

Jawab:

$$Y = \log 10000. -1 + \log 1000. -1 + \log 100. -1$$

$$Y = \log 10^4 + \log -1 + \log 10^3 + \log -1 +$$

$$\log 10^2 + \log -1$$

$$Y = 4 + kl + 3 + kl + 2 + k$$

$$Y = 9 + 2kl$$

Berdasarkan ketiga contoh penyederhanaan fungsi logaritma di atas, diperoleh hasil bilangan kompleks logaritma.

Penerapan kl dalam Perhitungan

Hitunglah dengan menggunakan logaritma, proposisi di bawah ini:

- $X = 10 \times -100 \times 1000$
- $X = -10 \times -100 \times 1000$
- $X = -10 \times -1000 : -100$
- $X = -10 \times -100 : -1.000.000$
- $X = -8 \times -64 \times -512$
- $X = -6 \times -36 \times 46656$
- $X = -125 : 5 \times -625$

1. Penyelesaian dengan cara panjang

- a. $X = 10 \times -100 \times 1000$

$$\log X = \log (10 \times -100 \times 1000)$$

$$\log X = \log 10 + \log -100 + \log 1000$$

$$\log X = \log 10 + \log 100. -1 + \log 1000$$

$$\log X = \log 10 + \log 100 + \log -1 + \log 1000$$

$$\log X = 1 + 2 + kl + 3$$

$$\log X = 6 + kl$$

$$X = 10^6 \times 10^{kl}$$

$$X = 1.000.000 \times -1$$

$$X = -1.000.000$$

- b. $X = -10 \times -100 \times 1000$

$$\log X = \log (-10 \times -100 \times 1000)$$

- $\log X = \log -10 + \log -100 + \log 1000$
 $\log X = \log 10 \cdot -1 + \log 100 \cdot -1 + \log 1000$
 $\log X = \log 10 + \log -1 + \log 100 + \log -1 + \log 1000$
 $\log X = 1 + kl + 2 + kl + 3$
 $\log X = 6 + 2kl$
 $X = 10^6 \times 10^{2kl}$
 $X = 1.000.000 \times 1$
 $X = 1.000.000$
- c. $X = -10 \times -1000 : -100$
- $\log X = \log (-10 \times -1000 : -100)$
 $\log X = \log -10 + \log -1000 - \log -100$
 $\log X = \log 10 \cdot -1 + \log 1000 \cdot -1 - \log 100 \cdot -1$
 $\log X = \log 10 + \log -1 + \log 1000 + \log -1 - (\log 100 + \log -1)$
 $\log X = 1 + kl + 3 + kl - (2 + kl)$
 $\log X = 1 + kl + 3 + kl - 2 - kl$
 $\log X = 2 + kl$
 $X = 10^2 \times 10^{kl}$
 $X = 100 \times -1 = -100$
- d. $X = -10 \times -100 : -1.000.000$
- $\log X = \log (-10 \times -100 : -1.000.000)$
 $\log X = \log -10 + \log -100 - \log -1.000.000$
 $\log X = \log 10 \cdot -1 + \log 100 \cdot -1 - \log 1.000.000 \cdot -1$
 $\log X = \log 10 + \log -1 + \log 100 + \log -1 - (\log 1.000.000 + \log -1)$
 $\log X = 1 + kl + 3 + kl - (6 + kl)$
 $\log X = 1 + kl + 3 + kl - 6 - kl$
 $\log X = -3 + kl$
 $X = 10^{-3} \times 10^{kl}$
 $X = 1/1000 \times -1$
 $X = -1/1000$
- e. $X = -8 \times -64 \times -512$
- $\log X = \log (-8 \times -64 \times -512)$
 $\log_8 X = \log_8 -8 + \log_8 -64 + \log_8 -512$
 $\log_8 X = \log_8 8 \cdot -1 + \log_8 64 \cdot -1 + \log_8 512 \cdot -1$
 $\log_8 X = \log_8 8 + \log_8 -1 + \log_8 64 + \log_8 -1 + \log_8 512 + \log_8 -1$
 $\log_8 X = 1 + kl + 2 + kl + 3 + kl$
 $\log_8 X = 1 + kl + 2 + kl + 3 + kl$
 $\log_8 X = 6 + 3kl$
 $X = 8^6 \times 8^{3kl}$
 $X = 262144 \times (-1)^3$
 $X = -262144$
- f. $X = -6 \times -36 \times 46656$
- $\log X = \log (-6 \times -36 \times 46656)$
 $\log_6 X = \log_6 -6 + \log_6 -36 + \log_6 46656$
 $\log_6 X = \log_6 6 \cdot -1 + \log_6 36 \cdot -1 + \log_6 46656$
 $\log_6 X = \log_6 6 + \log_6 -1 + \log_6 36 + \log_6 -1 + \log_6 46656$
 $\log_6 X = 1 + kl + 2 + kl + 3 + kl$
 $\log_6 X = 1 + kl + 2 + kl + 6$
 $\log_6 X = 9 + 2kl$
 $X = 6^9 \times 6^{2kl}$
 $X = 10.077.696 \times (-1)^2$
- g. $X = -125 : 5 \times -625$
- $\log X = \log (-125 : 5 \times -625)$
 $\log_5 X = \log_5 -125 - \log_5 5 + \log_5 -625$
 $\log_5 X = \log_5 125 \cdot -1 - \log_5 5 + \log_5 625 \cdot -1$
 $\log_5 X = \log_5 125 + \log_5 -1 - \log_5 5 + \log_5 625 + \log_5 -1$
 $\log_5 X = 3 + kl - 1 + 4 + kl$
 $\log_5 X = 6 + 2kl$
 $X = 5^6 \times 5^{2kl}$
 $X = 15625 \times (-1)^2$
 $X = 15625$

2. Penyelesaian dengan cara pendek

Cara ini dapat digunakan bagi pebelajar yang sudah lancar menghitung. Agar tidak jemu akan disajikan 3 contoh dari soal di atas, yaitu soal nomor a, f, dan g.

a. $X = 10 \times -100 \times 1000$

$$\log X = \log (10 \times -100 \times 1000)$$

$$\log X = \log 10 + \log 100 + \log -1 + \log 1000$$

$$\log X = 1 + 2 + kl + 3$$

$$\log X = 6 + kl$$

$$X = -1.000.000$$

f. $X = -6 \times -36 \times 46656$

$$\log_6 X = \log_6 6 + \log_6 -1 + \log_6 36 + \log_6 -1 + \log_6 46656$$

$$\log_6 X = 1 + kl + 2 + kl + 6$$

$$\log_6 X = 9 + 2kl$$

$$X = 10.077.696$$

g. $X = -125 : 5 \times -625$

$$\log_5 X = \log_5 125 + \log_5 -1 - \log_5 5 + \log_5 625 + \log_5 -1$$

$$\log_5 X = 3 + kl - 1 + 4 + kl$$

$$\log_5 X = 6 + 2kl$$

$$X = 15625$$

Berdasarkan ketujuh contoh perhitungan logaritma di atas, ternyata setelah dicek hasilnya betul dan dapat disimpulkan bahwa:

- Jika kl ganjil ($kl, 3kl, 5kl, \dots, n_{\text{ganjil}} kl$) maka hasil akhir perkaliannya adalah bilangan negatif.
- Jika kl genap ($2kl, 4kl, 6kl, \dots, n_{\text{genap}} kl$) maka hasil akhir perkaliannya adalah bilangan positif.

Hubungan antara bilangan khayal (i) dan bilangan khayal logaritma (kl)

Untuk melengkapi temuan penelitian ini, dihitung juga hubungan antara i dan kl , sebagai berikut.

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$\log_a i^2 = \log_a -1$$

$$\log_a i^2 = kl$$

$$i^2 = a^{kl}$$

$$i = \sqrt{a^{kl}} \quad \text{untuk } a = \text{bilangan konstan}$$

Simpulan

Hasil analisis deduktif menunjukkan bahwa logaritma berbilangan negatif ($\log_a -X$) dan $a > 0$ dapat dihitung dengan cara mudah dengan menggunakan bilangan khayal logaritma (kl). Besar $kl = \log_a -1$; $-1 = a^{kl}$ dan $i = \sqrt{a^{kl}}$.

Saran Penelitian lanjutan

Perlu dilakukan penelitian logaritma berkoefisien negatif ($Y = \log_a -X$ untuk Y genap dan $Y = \log_a X$ untuk Y ganjil).

Daftar Pustaka

- Churchill, Ruel V dan Brown, James W. (1990). *Complex variables and applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Hooper, Praticia dan Palsinelli, Linda (1983) *Intermediate algebra*. New York: macmillan Publishing.
- James, Robert C. (1992). *Mathematics distionary*. New York: van Nostrand Reinhold.
- Nasution, Andi H. 1997. *Matematika 2: untuk sekolah menengah kelas 2*. Jakarta: Balai Pustaka.

Smith, K.J. dan Boyle, P.J. 1985. *Intermediate algebra for college students*. Moterey, CA.: Brooks. Cole Publishing.

Sydsaeter, Knut dan Hammond, Peter J. 1995. *Mathematics for economic analysis*. Engglewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall

Wospakrik, Hans J. (1993). *Dasar-dasar matematika untuk fisika*. Depdikbud, Dirjen Dikti: P2PTKPT